

32. Familles sommables

1 Calculer la somme $\sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$.

2 Pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on note

$$a_{n,m} = \frac{1}{(n+m^2)(n+m^2+1)}$$

Montrer que la famille $(a_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable et donner sa somme.

3 Somme des restes de la série exponentielle.

Calculer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

4 Somme des restes de la série de Riemann. Déterminer les réels α tels que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty.$$

5 Déterminer tous les réels α tels que

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{(i+j)^\alpha} < +\infty.$$

6 Montrer que la famille

$$\left(\frac{1}{x^2} \right)_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$$

n'est pas sommable.

7 Calculer la somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

8 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$.

1. Montrer que la famille $(x^{kl})_{(k,l) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable.
2. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n,$$

où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de n .

9 On note A l'ensemble des entiers de $\mathbb{N}^*$ qui n'ont pas de 9 dans leur écriture décimale. Montrer que

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} < +\infty.$$