

31. Fonctions de deux variables

1 On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ et sa norme associée. Calculer le gradient des fonctions suivantes en un point $a \in \mathbb{R}^2$.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $u \mapsto \|u\|^2$
2. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, où $b \in \mathbb{R}^2$.
 $u \mapsto \langle b, u \rangle$

2 On pose $f : (x, y) \mapsto \sqrt{y - x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage du point $(1, 2)$.
3. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1, 2)$.

3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et g l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi : t \mapsto f(e^t \cos t, \ln(1 + t^2))$$

Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f .

4 Soient $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^2$. Déterminer le gradient de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ X \mapsto \frac{1}{2} \langle AX, X \rangle - \langle b, X \rangle$$

5 Déterminer les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants.

1. $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$.
2. $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
3. $f : (x, y) \mapsto 2y^4 - 3xy^2 + x^2$.
4. $f : (x, y) \mapsto x^3 - y^2 - x$.

6 La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : (x, y) \mapsto xe^y + ye^x$$

1. Montrer que $(-1, -1)$ est le seul point critique de f .
2. Montrer que f n'admet pas d'extremum local.

7 Soient $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, et

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$$

Déterminer les extrema locaux de f sur K .

8 Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, y \partial_1 f(x, y) - x \partial_2 f(x, y) = 0.$$

On pourra introduire la fonction $g : t \mapsto f(r \cos t, r \sin t)$.

9 Résolution d'une EDP

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + t, y + t) = f(x, y).$$

Montrer qu'alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = 0.$$

2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = 0.$$

10 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

1. Montrer que si f est homogène de degré α , alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x \partial_1 f(x, y) + y \partial_2 f(x, y) = \alpha f(x, y).$$

2. La réciproque est-elle vraie ?