

30. Variables aléatoires

1 Soit X une variable aléatoire sur un univers fini Ω telle que $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.
2. Déterminer $\mathbb{E}(X^2)$.
3. Déterminer $\mathbb{E}(e^X)$.

2 Une urne contient 2 boules rouges et $n - 2$ boules blanches, où $n \geq 2$. On tire successivement et sans remise toutes les boules. On note X_n la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de X_n .
2. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

3 Dans chacun des cas suivants, reconnaître la loi de la variable aléatoire X , puis donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

1. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire donnant le carré du résultat obtenu.
2. On choisit au hasard une boule dans une urne contenant 5 boules rouges et 4 boules noires. On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 s'il s'agit d'une boule rouge, 0 sinon.
3. On lance 20 fois un dé cubique équilibré. On note X la variable aléatoire qui désigne le nombre de fois où on obtient un nombre supérieur ou égal à 5.
4. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On tire au hasard un jeton du sac, on note la lettre obtenue et on le remet dans le sac. On recommence 5 fois le procédé, et on forme ainsi un mot de 5 lettres. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de voyelles dans ce mot.
5. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On les tire successivement sans remise jusqu'à obtenir le jeton 1. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages réalisés.
6. Une urne contient 12 boules : 6 vertes, 4 rouges et 2 noires. On tire successivement avec remise 8 boules. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules rouges obtenues.

4 Soit X une variable aléatoire réelle. Déterminer le réel a tel que l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : a \mapsto \mathbb{E}((X - a)^2)$$

soit minimale. Quelle est la valeur de ce minimum ?

5 On lance successivement deux fois un dé à 6 faces équilibré. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus respectivement, puis

$$X = X_1 - X_2.$$

Déterminer les lois des variables aléatoires X , $|X|$, et X^2 .

6 On dispose de k boules et n tiroirs, et on place successivement chacune des k boules dans un des n tiroirs de manière équiprobable. On introduit les variables aléatoires :

- ◊ T_i : nombre de boules dans le i -ème tiroir,
- ◊ V : nombre de tiroirs vides,

où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{E}(V)$.

7 Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'expérience suivante. On effectue une succession de n lancers d'une pièce équilibrée, et on note X_n la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois, à partir du deuxième lancer, où on a obtenu le même résultat qu'au précédent lancer.

1. Déterminer les lois de X_2 et X_3 , puis $\mathbb{E}(X_2)$ et $\mathbb{E}(X_3)$.
2. Soit $n \geq 2$.

a. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = n - 1)$.

b. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}(X_n = k - 1)).$$

3. Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$G_n : t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n = k) t^k.$$

a. Déterminer $G_n(1)$ et $G'_n(1)$.

b. Exprimer $\mathbb{V}(X_n)$ à l'aide de la fonction G_n .

c. Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_{n+1}(t) = \frac{1+t}{2} G_n(t).$$

d. En déduire, pour $n \geq 2$, une expression explicite de G_n .

e. Pour $n \geq 2n$ déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

Couples de variables aléatoires

8 On lance deux dés équilibrés, et on note X la variable aléatoire désignant le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X .

9 La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

- Vérifier qu'on a bien défini une loi de couple, et déterminer les lois de X et Y .
- X et Y sont-elles indépendantes ?
- Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$.

10 Dans un centre d'appels, un employé appelle n correspondants, dont on considère qu'ils décrochent avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Dans un second temps, l'employé rappelle tous les correspondants qui n'ont pas décroché. On note :

- N_1 la variable aléatoire désignant le nombre de correspondants ayant répondu au premier appel,
- N_2 la variable aléatoire désignant le nombre de correspondants qui ont répondu au deuxième appel.

Montrer que $N_1 + N_2$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

11 Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4, on y prélève 2 jetons sans remise. On définit les variables aléatoires X et Y correspondant respectivement au plus petit et au plus grand des deux numéros obtenus.

- Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
- Donner les lois marginales de X et Y .
- Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
- Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
- Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
- On pose $Z = YX$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$, puis déterminer la loi de Z .

12 *Formule de Wald.* Soient X une variable aléatoire, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X , et N une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, indépendante des variables aléatoires X_i . On considère

$$S = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Déterminer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

Inégalités probabilistes

13 Soient $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

- Calculer, pour tout réel t , l'espérance de la variable aléatoire e^{tX} .
- Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta} (1 - p + pe^t)^n.$$

14 Un système informatique distribue 100 requêtes simultanées entre deux serveurs identiques. Chaque requête est envoyée vers l'un ou l'autre serveur avec probabilité $\frac{1}{2}$. Chaque serveur peut traiter au plus n requêtes à la fois, où n est un entier de $\llbracket 50, 100 \rrbracket$.

Déterminer une valeur de n telle que la probabilité qu'aucun serveur ne soit saturé dépasse 95%, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

15 On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et suivant toutes la loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

- Donner la loi de S_n , en déduire l'espérance et la variance de $\bar{X}_n$.
- a. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \bar{X}_n - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

- Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante K_ε telle que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbb{P} \left(\left| \bar{X}_n - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{K_\varepsilon}{n}.$$

- En déduire que pour tout $r \in]0, \frac{1}{2}[$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \bar{X}_n - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{n^r} \right) = 0.$$