

29. Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n$ des réels distincts. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ en posant pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(x_i)Q(x_i).$$

2 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\operatorname{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|.$$

3 Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Étudier le cas d'égalité.

4 Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $M^T M \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ et $MM^T \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$.
2. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(M^T M) = \operatorname{Ker} M, \quad \operatorname{Ker}(MM^T) = \operatorname{Ker} M^T.$$

3. Que dire de $\operatorname{rg}(M^T M)$ et $\operatorname{rg}(MM^T)$?

Orthogonalité

5 Soient E un espace préhilbertien réel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

1.
 - a. Montrer que si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$.
 - b. Montrer que $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$.
 - c. Montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
2. On suppose de plus que E est de dimension finie. Montrer que $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

6 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\operatorname{Ker} A^T = (\operatorname{Im} A)^\perp \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} A^T = (\operatorname{Ker} A)^\perp.$$

7 Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Montrer que $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

8 *Théorème de représentation de Riesz en dimension finie.* Soient E un espace euclidien et $\varphi \in E^*$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle x, a \rangle.$$

9 Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. On considère le sous-espace vectoriel de E donné par $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

1. Montrer que $F^\perp = \{0_E\}$.
2. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

Projection orthogonale

10 Soit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}.$$

1. Déterminer une base et la dimension de F .
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

11 Soient E un espace euclidien dont on note la norme $\|\cdot\|$, et p un projecteur sur E . Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Distance à un sous-espace vectoriel

12 On note $E = \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$, et on considère $F = \operatorname{Vect}(\cos, \sin)$, sous-espace vectoriel de E . Déterminer $d(f, F)$, où $f : x \mapsto x$.

13 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $d(I_n, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

14 *Approximation au sens des moindres carrés.*

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - a. Montrer qu'il existe un unique $X^* \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$\|AX^* - B\| = \min_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme issue du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b. Montrer que X^* est l'unique élément de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $A^\top AX = A^\top B$.

2. On considère n points du plans donnés par leurs coordonnées $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, et $d \in \mathbb{N}^*$ avec $d < n$. On suppose qu'au moins $d + 1$ des x_i sont distincts. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que

$$\sum_{i=1}^n |Q(x_i) - y_i|^2 = \min_{P \in \mathbb{R}_d[X]} \sum_{i=1}^n |P(x_i) - y_i|^2.$$

on dit que Q est la meilleure approximation dans $\mathbb{R}_d[X]$ des points (x_i, y_i) , au sens des moindres carrés.