28. Probabilités sur un univers fini

Probabilités

1 Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots A_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - (n-1).$$

2 On lance 6 fois un dé équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir une fois chaque numéro ?

3 On lance deux fois un dé équilibré à 6 faces.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un double ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un total de 8 ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un total d'au moins 6 ?

4 On choisit au hasard 4 chaussettes dans un tiroir qui contient 12 paires distinctes de chaussettes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux paires ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une paire ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une paire ?

5 Une urne contient 15 jetons : un noir, 5 blancs et 9 bleus.

1. On tire aléatoirement trois jetons dans l'urne, de manière simultanée. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   - A : "on obtient un jeton de chaque couleur".
   - B : "on obtient un jeton noir exactement et au moins un bleu".
   - C : "on obtient trois jetons de la même couleur".
2. On effectue cette fois le tirage des trois jetons de manière successive et avec remise. Déterminer à nouveau la probabilité des événements A, B, C.

6 On considère un dé à 6 faces truqué de manière à ce que la probabilité d'obtenir un nombre soit proportionnelle à ce nombre. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Probabilités conditionnelles

7 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère n urnes numérotées de 1 à n, et on suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numéro k contient k jetons numérotés de 1 à k.

On choisit une urne au hasard, et on choisit un jeton au hasard dans cette urne.

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer la probabilité de l'événement

   A_k : « le jeton choisi porte le numéro k »

   sous la forme d'une somme.
2. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(A_k)$.

8 Un bit informatique est un symbole qui vaut 0 ou 1. Lors de sa transmission, il passe par une succession de canaux indépendants. À chaque passage, il est transmis intact avec une probabilité $p \in]0, 1[$, et est modifié avec une probabilité $1 - p$.

Au départ, le bit informatique envoyé vaut 1, et on note u_n la probabilité que sa valeur soit 1 après n canaux.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n et p.
3. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

9 On considère une maladie dont la fréquence d'apparition est de $1/10\,000$.

On dispose d'un test de dépistage pour cette maladie, qui a une fiabilité de 99%, c'est-à-dire que le test est positif à 99% pour les personnes malades, et négatif à 99% pour les personnes saines.

Quelle est la probabilité qu'un individu ayant effectué un test positif soit malade ?

10 Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés pour lesquels la probabilité dobtenir 6 est $\frac{1}{2}$ et 75 dés équilibrés.

1. On prend un dé au hasard et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On lance ce même dé n fois de manière indépendante, et on obtient n fois le 6. Quelle est la probabilité p_n quil soit pipé ?
3. Déterminer la limite de la suite (p_n).

11 Le finaliste d'un jeu est placé face à trois portes P_1, P_2 et P_3. Derrière l'une d'elle, il y a un lot à gagner, et derrière les deux autres il n'y a rien. Si le candidat ouvre la bonne porte, il emporte le lot.

Le candidat doit alors choisir une porte, et le présentateur lui désignera une des deux portes restantes qui ne renferme rien. Le candidat pourra alors choisir de garder son choix, ou en changer.

On note A l'événement « le joueur a choisi la bonne porte lors de son premier choix ».

1. Dans le scénario où le joueur garde son choix initial, quelle est la probabilité qu'il gagne ?
2. Dans le scénario où le joueur change de choix, quelle est la probabilité qu'il gagne ? Quelle stratégie le joueur a-t-il intérêt à adopter ?

12 Dans une population étudiée, une femme sur 10 000 est atteinte du cancer des bronches, et 4 hommes sur 10 000. Par ailleurs, dans cette poplulation,

- 70% des cancers bronchiques chez la femme apparaissent chez une fumeuse
- 90% des cancers bronchiques chez l'homme apparaissent chez un fumeur.

On précise par ailleurs que la proportion de fumeurs est 6 fois plus élevée chez l'homme que chez la femme.

Une fumeuse a-t-elle moins de risque de contracter la maladie qu'un fumeur ?

Indépendance

13 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce de monnaie qui a une probabilité $p \in]0,1[$ de donner Pile.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir le premier Pile au n-ème lancer.
2. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Déterminer la probabilité d'obtenir le k-ème Pile au n-ème lancer.

14 Un joueur dispose dune pièce de monnaie équilibrée quil lance deux fois. À chaque lancer, il gagne un euro sil obtient pile et perd un euro sil obtient face. On introduit les événements :

A : « le joueur obtient pile au premier lancer »,
B : « le joueur obtient pile au second lancer »,
C : « le joueur gagne 0 euro après les deux lancers ».

1. Les événements A, B, C sont-ils deux à deux indépendants ?
2. Sont-ils mutuellement indépendants ?

15 On dispose d'une urne contenant une boule blanche et une boule noire. On effectue n tirages indépendants avec remise, et on s'intéresse aux événements suivants :

A_n : « on obtient des boules des couleurs »,
B_n : « on obtient au plus une boule noire ».

1. Pour tout $n \geqslant 2$, calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$.
2. Les événements A_2 et B_2 sont-ils indépendants ?
3. Les événements A_3 et B_3 sont-ils indépendants ?
4. Pour $n \geqslant 4$, étudier l'indépendance de A_n et B_n.

16 *Fonction indicatrice d'Euler.* Pour un entier $n \geqslant 2$, on cherche à calculer le nombre $\varphi(n)$ d'entiers de $[\![1,n]\!]$ qui sont premiers avec n.

On munit $\Omega = [\![1,n]\!]$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Pour tout diviseur d de n, on considère l'événement

$$A_d = \{k \in [\![1,n]\!],\ d \text{ divise } k\}.$$

1. Pour tout diviseur d de n, calculer $\mathbb{P}(A_d)$.
2. Soient $p_1, \dots, p_r$ les facteurs premiers de n. Montrer que les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. On considère l'évènement

   $$B = \{k \in [\![1,n]\!],\ k \wedge n = 1\}.$$

   Montrer que

   $$\mathbb{P}(B) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

   En déduire une expression de $\varphi(n)$.