27. Dénombrement

1 Soit E un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$. Déterminer le nombre d'applications de E dans E qui ne sont pas surjectives.

2 Soient E, F deux ensembles. Soient par ailleurs $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(F)$. Dans chacun des cas suivants, dire si l'assertion est vraie ou fausse, et justifier.

1. Si A est fini, $f(A)$ est fini.
2. Si $f(A)$ est fini, alors A est fini.
3. Si B est fini, alors $f^{-1}(B)$ est fini.
4. Si $f^{-1}(B)$ est fini, alors B est fini.

3 Combien d'anagrammes peut-on faire avec les mots *tigre*, *panda*, *coccinelle* ?

On autorise que les mots obtenus n'aient pas de sens.

4 On considère une classe de $3n$ étudiants. De combien de manières peut-on répartir ces étudiants en groupes de 3 ?

5 On joue au Poker avec un jeu de 52 cartes dans lequel on tire une main de 5 cartes.

1. Combien de mains ont une paire exactement (pas d'autre paire, ni de brelan ni de carré) ?
2. Combien de mains ont deux paires exactement (pas de brelan ni de carré) ?
3. Combien de mains ont un brelan exactement (pas de full) ?
4. Combien de mains ont un full ?

6 Soient $k, n \in \mathbb{N}^\star$. Dénombrer les fonctions $f : [\![1, k]\!] \to [\![1, n]\!]$ strictement croissantes.

7 Soient $k, n \in \mathbb{N}^\star$. De combien de manières différentes peut-on placer k tours sur un échiquier carré de taille n sans qu'elles puissent se prendre ?

8 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

9 *Formule de Vandermonde.* Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$. En utilisant un raisonnement par dénombrement, montrer que

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}.$$

Expliciter la formule dans le cas où $n = p = q$.

10 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On pose par ailleurs $B_0 = 1$.

1. Déterminer B_1, B_2, B_3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer B_{n+1} en fonction des B_i, $i \in [\![0, n]\!]$.

11 On se donne un ensemble E à $n \geqslant 2$ éléments.

1. Combien de partitions en deux ensembles non vides de E peut-on faire ?
2. De combien de façons peut-on choisir une paire de sous-ensembles disjoints non vides de E ?

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note u_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire les applications $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1. Déterminer u_1, u_2, u_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n.$$