

## 26. Groupe symétrique – Déterminants

### Groupe symétrique

**1** Déterminer la signature de la permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_8$  donnée par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 7 & 8 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

**2** On considère les permutations  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_8$  :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 5 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 8 & 5 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter les permutations  $\sigma^2, \sigma\tau, \tau\sigma, \tau^2$ .
2. Décomposer  $\sigma$  et  $\tau$  en produit de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions.
3. Déterminer  $\varepsilon(\sigma)$  et  $\varepsilon(\tau)$ .
4. Déterminer des entiers  $n$  et  $m$ , tels que  $\sigma^n = \text{Id}$  et  $\tau^m = \text{Id}$ .

**3** Soit un entier  $n \geq 2$ . On considère les permutations  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$  données par :

$$\tau = (1 \ 2), \quad \sigma = (1 \ 2 \ \dots \ n).$$

1. Montrer que toute permutation de  $\mathfrak{S}_n$  peut s'écrire comme produit de transpositions parmi  $(1 \ 2), (1 \ 3), \dots, (1 \ n)$ .
2. Montrer que toute permutation de  $\mathfrak{S}_n$  peut s'écrire comme produit de transpositions parmi  $(1 \ 2), (2 \ 3), \dots, (n-1 \ n)$ .
3. Pour  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ , calculer  $\sigma^k \tau \sigma^{-k}$ .
4. Montrer que toute permutation de  $\mathfrak{S}_n$  peut s'écrire comme produit de permutations parmi  $\sigma, \tau$ .

**4** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $G = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma(n) = n\}$ .

1. Montrer que  $G$  est un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$ .
2. Montrer que si  $n \geq 2$ , toute permutation de  $\mathfrak{S}_n$  s'écrit comme produit de transpositions parmi  $(1 \ 2), (1 \ 3), \dots, (1 \ n)$ .
3. Montrer que  $G$  est un sous-groupe maximal de  $\mathfrak{S}_n$  : si  $G$  est contenu dans un sous-groupe  $H$  de  $\mathfrak{S}_n$ , alors  $H = G$  ou  $H = \mathfrak{S}_n$ .

### Déterminants

**5** Calculer les déterminants suivants.

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

**6** Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Calculer les déterminants suivants, en donnant une forme factorisée du résultat.

$$1. \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{vmatrix}$$

**7** Soient  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note

$$M_n = \begin{pmatrix} \cos \theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 \cos \theta & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

et  $\Delta_n = \det M_n$ .

1. Déterminer  $\Delta_1, \Delta_2$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\Delta_{n+2} = 2 \cos \theta \Delta_{n+1} - \Delta_n.$$

3. En déduire  $\Delta_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**8** Soit  $F = \{x \mapsto e^x P(x), P \in \mathbb{R}_n[X]\}$ .

1. Justifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  dont on donnera une base.
2. Montrer que

$$D : f \mapsto f'$$

définit un endomorphisme de  $F$  et calculer  $\det D$ .

**9** Soient les matrices  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\hat{A} = ((-1)^{i+j} a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Montrer que

$$\det A = \det \hat{A}.$$

**10** Déterminant de Vandermonde.

Pour tous  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ , on note :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

2. Soient  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$  où les  $x_i$  sont deux à deux distincts. Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$  tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i.$$

**11** Soient un entier  $n \geq 2$  et une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A + M) = \det A + \det M.$$

1. Montrer que  $\det A = 0$ .
2. Montrer que  $A = 0$ .

On pourra avoir recours aux matrices  $J_r$ .

**12** Soient deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  telles que

$$\det A = \det B = \det(A + B) = \det(B - A) = 0.$$

Montrer que pour tous  $x, y \in \mathbb{K}$ ,  $\det(xA + yB) = 0$ .

**13** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 = -\text{Id}_E$ . Montrer que  $n$  est pair.

**14** Soient  $n \in \mathbb{N}$  un entier impair et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $A$  n'est pas inversible.

Le résultat est-il toujours vrai si  $n$  est pair ?

**15** Calculer le déterminant de l'endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3[X])$  défini par

$$f : P \mapsto XP'(X + 2) + P(1)(X^3 - 1)$$

Que peut-on en déduire ?

**16** Soient  $m \in \mathbb{R}$  et les vecteurs  $e_1 = (1, 2, -1)$ ,  $e_2 = (3, 0, m)$ ,  $e_3 = (m, 1, 2)$ . Déterminer toutes les valeurs de  $m$  telles que  $(e_1, e_2, e_3)$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**17** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . On considère  $f \in \mathcal{L}(E)$  dont la matrice

dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les scalaires  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que

$$\det(A - \lambda I_3) = 0.$$

2. Déterminer une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**18** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice telle que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} \in \{-1, 1\}.$$

Montrer que  $2^{n-1} \mid \det A$ .