

25. Équations différentielles

Équations différentielles d'ordre 1

1 Résoudre sur $] - 1, 1[$ l'équation différentielle :

$$\sqrt{1 - x^2} y' + y = 1.$$

2 Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes.

1. $(2 + \cos x)y' + \sin(x)y = (2 + \cos x) \sin x.$
2. $(1 + \cos^2 x)y' - \sin(2x)y = \cos x.$

3 Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes.

1. $y' + 2y = x^2.$
2. $y' + y = 2 \sin x.$
3. $y' - y = (x + 1) e^x.$
4. $y' + y = x - e^x + \cos x.$

4 Résoudre l'équation différentielle

$$(e^x - 1)y' + e^x y = 1$$

sur \mathbb{R}_+^* , puis sur \mathbb{R}_-^* , puis sur \mathbb{R} .

5 Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle

$$(x \ln x) y' - y = -\frac{1 + \ln x}{x}.$$

6 Déterminer toutes les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $[0, 1]$ telles que

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Équations différentielles d'ordre 2

7 Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + 2y' + 2y = 2x.$
2. $y'' + y = x^2 + 1.$
3. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2.$

8 Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + 2y' + y = xe^x.$
2. $y'' + y' - 2y = xe^x.$

$$3. y'' + 2y' + 2y = (x + 1)e^{-x}.$$

9 Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + y = \operatorname{sh} x.$
2. $y'' + 2y' + 2y = \sin x.$
3. $y'' - y = 2 \cos(x) + e^x.$
4. $y'' + y' + y = e^x \cos x.$
5. $y'' + y = 2 \cos^2 x.$

10 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\pi - x).$$

11 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x.$$

12 Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle :

$$(1 + e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x + 1)y = xe^x,$$

en introduisant la fonction $z : x \mapsto (1 + e^x)y(x).$

13 Nous cherchons à trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y).$$

1. Montrer que si f est solution du problème, alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f''(x)f(y) = f(x)f''(y).$$

2. En déduire les solutions du problème.

14 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0. \tag{E}$$

1. En posant

$$z : x \mapsto y(e^x),$$

montrer que y est solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du second ordre (E') que l'on déterminera.

2. En discutant selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique de (E') , donner la forme des solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* , puis sur \mathbb{R}_-^* .

3. Résoudre l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = 0.$