

24. Séries numériques

Nature des séries, calculs de somme

1 Dans chacun des cas suivants, étudier la nature de la série $\sum u_n$.

- | | |
|--|---|
| 1. $u_n = \frac{ \sin n }{n}$.
2. $u_n = \ln \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 2n + 1}$.
3. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
4. $u_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n$.
5. $u_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$.
6. $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$.
7. $u_n = \frac{n\sqrt{n}}{2^n + n}$. | 8. $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$.
9. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}}$.
10. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.
11. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)n^2$.
12. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.
13. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$. |
|--|---|

2 Calculer la somme de la série

$$\sum \frac{\cos n}{2^n}.$$

3 Dans chacun des cas suivants, étudier la nature de la série $\sum u_n$, et calculer sa somme si elle converge.

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
3. $u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
4. $u_n = \frac{n+1}{n!}$.
5. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$.

On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

Comparaison séries-intégrales

4 Séries de Bertrand.

1. Selon la valeur de $\beta \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}.$$

2. Montrer que la série

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$

converge si et seulement si :

$$\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

5 Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(n!)$.

6 Soit $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}, \text{ et si } \alpha > 1, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Si $0 < \alpha < 1$, donner un équivalent de S_n .
2. Si $\alpha > 1$, donner un équivalent de R_n .

Séries à termes positifs

7 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. Montrer que les séries $\sum \max(u_n, v_n)$ et $\sum \sqrt{u_n v_n}$ sont convergentes.

8 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que $\sum u_n^2$ est convergente.

9 Soit $u_0 \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer ;

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[.$$

En déduire que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

2. Montrer que $\sum u_n^2$ converge et déterminer sa somme.
3. Montrer que $\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$ diverge.
4. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

10 Vers la formule de Stirling. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{e^n}{n^n \sqrt{n}} n!$$

1. Déterminer la nature de la série

$$\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)).$$

2. En déduire l'existence d'un réel $K > 0$ tel que

$$n! \sim K \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

11 Règle de Cauchy. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que

$$u_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

1. Montrer que si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.
2. Montrer que si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.
3. Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

12 Règle de d'Alembert.

1. Comparaison logarithmique. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer : – si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge,
– si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

2. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

- a. Montrer que si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
- b. Montrer que si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.
- c. Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

13 Règle de Raabe-Duhamel On considère une suite (u_n) à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et un réel $a > 0$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que : – si $a > 1$ alors $\sum u_n$ converge,
– si $a < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.
2. Que dire du cas $a = 1$?

14 Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-a} - \ln n.$$

Montrer que la série (u_n) converge.

On pourra s'intéresser à la série $\sum u_{n+1} - u_n$.

Séries à termes quelconques

15 Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ dans chacun des cas suivants.

$$1. u_n = \frac{(-1)^2}{n^2 - n - 3}.$$

$$2. u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right).$$

$$3. u_n = \cos(\pi \sqrt{n^2 + n - 1}).$$

16 Un contre-exemple.

1. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

2. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$