

23. Représentation matricielle des applications linéaires

Représentation matricielle

1 Représenter la matrice des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques.

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x + y, y - 2x + z)$
2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (y + z, z + x, x + y)$
3. $f : \mathbb{R}^3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3[X]$
 $P \mapsto P(X + 1)$
4. $f : \mathbb{R}^3[X] \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $P \mapsto (P(1), P(2), P(3), P(4))$

2 On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f : (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, -x + y, x - z).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f est un isomorphisme et déterminer f^{-1} .

3 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

4 Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que p est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

5 On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$$

$$D = \text{Vect}((1, 0, -1)).$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. On note :

p le projecteur sur P parallèlement à D ,
 q le projecteur sur D parallèlement à P ,
 s la symétrie par rapport à P parallèlement à D .

Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.

6 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par

$$f : M \mapsto AM$$

1. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $f(M)$.
2. Déterminer $\text{Ker } f$, qu'en déduire sur f ?
3. Exprimer la matrice B de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Calculer A^{-1} et en déduire B^{-1} .

7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application

$$\varphi : P \mapsto 3XP' + (X^2 - 1)P''$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E .
3. L'endomorphisme φ est-il bijectif?
4. Déterminer une base de $\text{Im } \varphi$ et de $\text{Ker } \varphi$.

8 Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$1. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Changement de base

9 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de E donné par sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1} .
3. Quelle relation existe-t-il entre les matrices A, P, P^{-1} et $D = \text{diag}(1, 2, 3)$? En déduire l'expression de A^n en fonction de n .

10 Soient f_1, f_2, f_3 les fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définies par

$$f_1 : x \mapsto e^{2x}, \quad f_2 : x \mapsto xe^{2x}, \quad f_3 : x \mapsto x^2e^{2x}$$

et $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .
2. Montrer que $\Phi : f \mapsto f'$ définit un endomorphisme sur E et déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Justifier que Φ est un automorphisme.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $f \in E$ définie par $f : x \mapsto (4x^2 - 1)e^{2x}$. Expliciter $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

11 Dans les deux cas suivants, les matrices A et B sont-elles semblables?

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

12 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$. Montrer que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

13 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14 Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente (il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$), alors $\text{tr}(A) = 0$.

15 Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\text{tr } A = 0$, alors A est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

On pourra utiliser le résultat suivant : si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.