

22. Intégration sur un segment

Calcul de primitive

1 Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.
2. $x \mapsto \tan^2 x$.
3. $x \mapsto \frac{1}{x + x \ln^2(x)}$.
4. $x \mapsto \operatorname{th} x$.
5. $x \mapsto \cos^2 x$.
6. $x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$.
7. $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1 - 2x^2}}$.

1. $x \mapsto 2e^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. $x \mapsto \tan x - x$ sur le domaine de $\tan$.
3. $x \mapsto \arctan(\ln x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. $x \mapsto \ln(e^x + e^{-x})$.
5. $x \mapsto \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{x}{2}$.
6. $x \mapsto \frac{1}{2} (\ln(|x+1| - \ln|x-1|))$.
7. $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}x)$.

2 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx$.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \left[\frac{1}{2 \cos^2 x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$.
2.
$$\begin{aligned} \int \cos x (1 - \sin^2 x) \sin^2 x dx &= \int \cos x \sin^2 x - \int \cos x \sin^4 x dx \\ &= \left[\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

3 Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^x \cos(2x)$.
2. $x \mapsto x e^x \sin x$.

1. $x \mapsto \frac{e^x}{5} (\cos(2x) + 2 \sin(2x))$.
2. On obtient : $x \mapsto \frac{e^x}{2} ((1-x) \cos x + x \sin x)$.

4 En effectuant une ou plusieurs intégrations par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \arctan x$.
2. $x \mapsto x^2 \ln x$.
3. $x \mapsto x \arctan x$.
4. $x \mapsto \ln(1 + x^2)$.
5. $x \mapsto x^2 \sin x$.

1. $x \mapsto x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$.
2. On obtient $x \mapsto \frac{x^3}{9} (3 \ln x - 1)$.
3. $x \mapsto \frac{1}{2} ((x^2 + 1) \arctan x - x)$.
4. $x \mapsto 2(\arctan x - x) + x \ln(1 + x^2)$.
5. 2 IPP. $x \mapsto (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$.

5 Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$.
2. $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 3x + 4}$.
3. $x \mapsto \frac{3x + 2}{2x^2 - 4x + 3}$.
4. $x \mapsto \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 2}$.

1. $x \mapsto \ln|x-3| - \ln|x-2|$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.
2. $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x+3}{\sqrt{7}}$ sur $\mathbb{R}$.
3.
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4} \frac{4x-4}{2x^2-4x+3} + \frac{5}{2x^2-3x+4} \\ &= \frac{3}{4} \frac{4x-4}{2x^2-4x+3} + \frac{5}{2} \frac{1}{(x-1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \end{aligned}$$

Une primitive est alors

$$x \mapsto \frac{3}{4} \ln(2x^2 - 4x + 3) + \frac{5}{\sqrt{2}} \arctan\left(\sqrt{2}(x-1)\right)$$

4. $f(x) = 1 - \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{1}{x^2+2x+2}$

Une primitive est alors

$$x \mapsto x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + \arctan(x + 1)$$

6 À l'aide d'un changement de variable bien choisi, déterminer une primitive des fonctions suivantes.

- $x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$.
- $x \mapsto \frac{x}{1+x^4}$.
- $x \mapsto \frac{1}{e^{2x} + e^{-x}}$.

- $u = \sqrt{x+1}$, on obtient $x \mapsto \frac{2}{3} \sqrt{x+1}(x-5)$.
- $u = x^2$, on obtient $x \mapsto \frac{1}{2} \arctan(x^2)$.
- $y = e^x$, on obtient $\int \frac{1}{y^3+1} dy$, puis DES

$$\frac{1}{y^3+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y+1} - \frac{y+2}{y^2-y+1} \right).$$

Finalement,

$$\frac{1}{3} \ln(e^x+1) - \frac{1}{6} \ln(e^{2x}-e^x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2e^x-1}{\sqrt{3}}$$

7 Calculer les intégrales suivantes.

- $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.
- $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.
- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} dx$.

- Changement de variable $t = \arctan x$ car alors $\frac{1}{1+x^2} dx = dt$. Puis

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

- Changement de variable $t = \arcsin x$ car alors $dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}.$$

- Changement de variable $u = \sqrt{e^x+1}$. On obtient

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{1}{u^2-1} du = \ln \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{e+1}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{e+1}+1)}$$

après DES.

8 Déterminer une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{\arcsin \sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}$$

Sur $]0, 1[$. IPP :

$$2 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \int^x \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} dx$$

Changement de variable $y^2 = x$, on obtient

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} dx &= \int^y \frac{2}{1-y^2} dy \\ &= \int^y \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right) dy \\ &= -\ln(1-y) + \ln(1+y) \end{aligned}$$

Finalement

$$2 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} + \ln(1-\sqrt{x}) - \ln(1+\sqrt{x}).$$

Propriétés de l'intégrale

9 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| \leq \int_0^1 t^n \|f\|_{\infty} dt \leq \|f\|_{\infty} \frac{1}{n+1}$$

10 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = c.$$

Montrer que f est périodique.

On pose $\varphi : x \mapsto \int_x^{x+T} f(t) dt$. En notant F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = F(x+T) - F(x).$$

Ainsi, en dérivant, on obtient $\varphi'(x) = f(x+T) - f(x)$. Comme $\varphi' = 0$, on en déduit que f est T -périodique.

11 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Montrer que f admet au moins un point fixe sur $[0, 1]$.

Si f n'a pas de point fixe, par le TVI, on a $f(x) < x$ pour tout $x \in [0, 1]$, ou $f(x) > x$ pour tout $x \in [0, 1]$. Dans le premier cas, on a $\int_0^1 f(t) dt < \frac{1}{2}$, dans le second, on a $\int_0^1 f(t) dt > \frac{1}{2}$.

12 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

TAF appliqué à une primitive de f .

OU : $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M$, puis TVI.

13 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\int_a^b \sin(nt) f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

IPP.

14 Soit une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\int_0^1 f(t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0).$$

Sommes de Riemann

15 Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}.$$

16 Déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+3k}.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}.$

- $\frac{2 \ln 2}{3}.$
- $\sqrt{3} - 1.$
- $\frac{\ln 2}{2}.$

17 Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha \neq 1$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \ln(\alpha^2 - 2\alpha \cos(t) + 1) dt.$$

Intégrales de Wallis

18 On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$

- Calculer I_0 , I_1 et I_2 .
- Etudier la monotonie puis la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+1}).$$

- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Formules de Taylor

19 À l'aide de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$, montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\ln 2}{2}.$$

20 Déterminer une approximation de $\cos \frac{1}{2}$ à $5 \cdot 10^{-2}$ près.

Taylor-Lagrange à l'ordre 2 : on obtient $\frac{7}{8}$, valable à $\frac{1}{48}$ près. C'est en fait une approximation bien meilleure : si on écrit Taylor-Lagrange à l'ordre 3, on obtient que cette même approximation est valable à $\frac{1}{384} \simeq 0,0026$ près.

21 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

En utilisant la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et une formule de Taylor appropriée, montrer que (u_n) converge vers $\ln 2$.