

21. Applications linéaires

Applications linéaires

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est linéaire. Si c'est le cas, déterminer son noyau.

$$1. \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x - 3$$

$$2. \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x - 3y$$

$$3. \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

$$4. \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y, y - z)$$

$$5. \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y)(y - z)$$

$$6. \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$7. \quad f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P + P'$$

$$8. \quad f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_n)_n \mapsto u_0 + u_1$$

$$9. \quad f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ M \mapsto AM$$

2 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (1, 1), \\ f(0, 1, 0) &= (0, 1) \\ f(0, 0, 1) &= (-1, 1). \end{aligned}$$

1. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(x, y, z)$.
2. Déterminer le noyau de f , puis le rang de f .
3. L'application f est-elle injective ? Surjective ?

3 On considère l'application linéaire

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (3x - y, x + y, x - y)$$

1. Déterminer l'image de h .
2. L'application h est-elle injective ? Surjective ?

4 Soient E, F, G des espaces vectoriels. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g$ et $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g \circ f$.

2. Montrer que

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \Leftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } g.$$

5 Soient E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. Montrer que $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont stables par g .

6 Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par :

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM - MA$$

7 Soient $n \in \mathbb{N}$ et des scalaires $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer de deux manières différentes que

$$f : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$$

est un isomorphisme.

8 Montrer que

$$f : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P \mapsto XP' + P(0)$$

définit un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

9 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que

$$E = \text{Ker } f + \text{Im } f \Leftrightarrow \text{Im } f^2 = \text{Im } f.$$

2. Montrer que

$$\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f.$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur $f \in \mathcal{L}(E)$ pour que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

10 Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que l'endomorphisme f non nul, et nilpotent : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}, \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

2. On suppose que E est de dimension finie n , et que :

$$\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}, f^p(x) = 0_E.$$

Montrer que f est nilpotente.

3. Si E est de dimension infinie, le résultat de la question précédente est-il toujours vrai ?

11 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1. Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

12 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$. Montrer que

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_E).$$

13 Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, (x, f(x)) \text{ est une famille liée.}$$

Montrer que f est une homothétie.

Projecteurs, symétries

14 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (4x - 6y, 2x - 3y) \end{aligned}$$

Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^2$ et préciser ses éléments caractéristiques.

15 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P &\mapsto P - 2P'(0)X \end{aligned}$$

Montrer que f est une symétrie de $\mathbb{K}[X]$ et préciser ses éléments caractéristiques.

16 Soient E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que :

- ◊ g est un projecteur,
- ◊ $\text{Ker } g$ et $\text{Im } g$ sont stables par f .

Montrer que f et g commutent.

17 Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et p, q deux projecteurs sur E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq = qp = 0$.
2. On suppose que $p + q$ est un projecteur.
 - a. Montrer que $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p + \text{Im } q$.
 - b. Montrer que $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.