

20. Espaces vectoriels de dimension finie

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer une base et la dimension de l'espace vectoriel F .

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$.
2. $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = MA\}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1 - X) = P(X)\}$.
4. $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X], P(-1) = P(0) = P(1)\}$.

2 Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, où $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$.

3 Déterminer le rang des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivantes.

1. (u_1, u_2, u_3) , où $u_1 = (1, 1, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0, 1)$ et $u_3 = (-1, 1, -1, 1)$.
2. (v_1, v_2, v_3, v_4) , où :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 0, 2), & v_2 &= (1, 0, 1, -1), \\ v_3 &= (2, 0, 1, 1), & v_4 &= (2, -1, 2, -2). \end{aligned}$$

4 On note $E = \mathcal{F}(-1, 1[, \mathbb{R})$, ainsi que les fonctions $f_1, f_2, f_3, f_4 \in E$ définies par :

$$\begin{aligned} f_1 : x &\mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, & f_2 : x &\mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\ f_3 : x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & f_4 : x &\mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Déterminer $\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

5 Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$. On considère :

$$\begin{aligned} F &= \{P \in E, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}, \\ G &= \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}, \\ H &= \{P \in E, P(-X) = P(X)\}. \end{aligned}$$

1. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels F , G et H de E .
2. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$.
3. Montrer que $E = (F \oplus G) \oplus H$.

6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que la famille $(I_n, A, \dots, A^d)$ est liée.

2. En déduire qu'il existe $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que

$$\sum_{k=0}^d a_k A^k = 0_{n,n}.$$

On dit que P est un polynôme annulateur de A .

7 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E tels que

$$\dim F + \dim G > \dim E.$$

Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

8 Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et deux sous-espaces vectoriels D et H de E qui vérifient

$$\dim D = 1, \quad \dim H = n - 1.$$

Montrer que si $D \not\subset H$, alors D et H sont supplémentaires dans E .

9 Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E . On suppose que :

$$G \subset H, \quad F \cap G = F \cap H \quad \text{et} \quad F + G = F + H.$$

1. Montrer que si E est de dimension finie, alors $G = H$.
2. Montrer que le résultat tient toujours si E est de dimension infinie.

10 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que

$$E = F \oplus H = G \oplus H.$$

En d'autres termes, F et G ont un supplémentaire commun dans E .