

19. Arithmétique des polynômes – Fractions rationnelles

Arithmétique des polynômes

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^n - 1$.

2 Déterminer la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme P dans chacun des cas suivants.

1. $P = X^4 + X^2 + 1$.
2. $P = X^4 + X^2 - 6$.
3. $P = X^8 + X^4 + 1$.

3 Déterminer la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme $P = X^8 + X^4 + 1$.

4 Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ définis par $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 + 1$.

1. Déterminer $U_0, V_0 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU_0 + BV_0 = 1$.
2. Trouver tous les couples $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $AU + BV = 1$.

5 Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$.

1. Dédurre de la division euclidienne de n par m celle de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.
2. Montrer que si $d = n \wedge m$, alors

$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^d - 1.$$

6 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\tilde{P}(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer qu'il existe deux polynômes $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

1. Montrer le résultat si P est scindé.
2. Montrer le cas général.

Fractions rationnelles

7 Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$ telle que $F' = \frac{1}{X}$.

8 Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle F dans chacun des cas suivants.

1. Dans $\mathbb{R}(X)$:

a. $F = \frac{X^2}{X^2 - 4X + 3},$

b. $F = \frac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)},$

c. $F = \frac{X - 2}{X(X - 1)^2},$

d. $F = \frac{X + 1}{X^2(X^2 + 1)}.$

2. Dans $\mathbb{C}(X)$:

a. $F = \frac{2X}{X^2 + 1},$

b. $F = \frac{X^2 + X - 1}{X(X^2 + 1)}.$

9 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F = \frac{1}{X(X - 1) \dots (X - n)}.$$

10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de

$$F = \frac{1}{X^n - 1}.$$

11 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F_n = \frac{1}{X^n(X + 1)}.$$

12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$

13 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, (P'^2 - PP'')(x) \geq 0.$$

2. Le résultat tient-il toujours si P n'est pas scindé ?