

18. Convexité

- 1** Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\frac{\pi}{4} x \leq \arctan x \leq x.$$

- 2** Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ deux fonctions convexes.

1. Montrer que si g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe.
2. Montrer que si g n'est pas croissante, alors le résultat n'est pas vrai.

- 3** Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction convexe strictement croissante. Montrer que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

- 4** Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexe majorée. Montrer que f est constante.

- 5** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ convexe strictement décroissante. Montrer que la bijection réciproque de f est convexe sur l'intervalle $J = f(I)$.

- 6** Soit f une fonction convexe sur un intervalle I . Montrer que si f admet un minimum local en $a \in I$, alors le minimum est global.

- 7** Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexe.

1. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que f est positive.
2. On suppose que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote en $+\infty$.

- 8** Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer l'inégalité dite arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

- 9** Inégalité de Hölder. Soient $p, q > 0$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1. Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+$, on a

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

On pourra utiliser la concavité de la fonction $\ln$.

2. Montrer que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

On pourra poser, $u_i = \frac{a_i}{\alpha}$ et $v_i = \frac{b_i}{\beta}$ où

$$\alpha = \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \beta = \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}.$$

- 10** Soient $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer l'inégalité de Jensen :

$$\varphi \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \leq \int_0^1 \varphi(f(t)) dt.$$

2. On suppose de plus que f est strictement positive, et que $\int_0^1 f(t) dt = 1$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t) \ln(f(t)) dt \geq 0.$$