

17. Analyse asymptotique

Relations de comparaison

1 Soient $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \bar{I}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Montrer :

$$e^{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} e^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

2. On suppose que f est strictement positive sur un voisinage de a et

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x).$$

a. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$, montrer que

$$\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(g(x)).$$

b. Montrer que le résultat tient toujours si on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ avec $\ell \neq 1$.

3. Déterminer un équivalent en 0 et $+\infty$ de $\ln(e^x - 1)$.

2

1. Montrer que $\ln(\ln x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln x)$.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

3 Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes aux voisinages précisés.

1. $x \mapsto \frac{x(\ln(1+x))^2}{3x+4}$ en 0.

2. $x \mapsto \frac{\sqrt{1+\tan^2 x} - 1}{\tan x}$ en 0.

3. $x \mapsto \frac{\sqrt{e^x - 1}}{(1+x)^5 - 1}$ en 0^+ .

4. $x \mapsto \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$ en 0.

5. $x \mapsto \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x + 1} \right)^x$ en $+\infty$.

4

1. Déterminer un équivalent de $x^{\frac{1}{x}} - 1$ en $+\infty$.

2. En déduire un équivalent de $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x$ en $+\infty$.

5 On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt.$$

Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

6 Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ où $a, b > 0$.

Développements limités

7 Déterminer les développements limités suivants.

1. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x) \sin x$.

2. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$.

3. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3+2x}}$.

4. $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$.

5. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \arcsin x$.

6. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch}(x)$.

7. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)^2$.

8 Déterminer les développements limités suivants.

1. $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $x \mapsto \sin x$.

2. $DL_3(1)$ de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$.

3. $DL_3(+\infty)$ de $x \mapsto \sqrt{1 + \sin \frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}$.

4. $DL_2(+\infty)$ de $x \mapsto \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}$.

9 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : x \mapsto x \operatorname{ch} x.$$

1. Justifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note g sa bijection réciproque.

2. Justifier que g admet un $DL_5(0)$ sous la forme

$$g(y) = a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + o(y^5).$$

3. Déterminer a_1, a_3, a_5 .

Calculs de limites

10 Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^3} (\tan(\tan x) - \sin(\sin x)).$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{x} \right)^{x^2}.$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\tan x} \right).$

Etude de fonction

11 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}.$$

- Déterminer le $DL_2(0)$ de f , en déduire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 et la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente.
- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote oblique en $+\infty$? En $-\infty$? Si oui, déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport aux asymptotes.

12 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$$

- Étudier l'existence d'asymptote à $\mathcal{C}_f$, ainsi que la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à celles-ci.
- Terminer l'étude, et donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Étude asymptotique des suites

13 Dans chacun des cas suivants, donner un équivalent de u_n dans chacun des cas suivants, et en déduire la limite de la suite (u_n) .

- $u_n = \frac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2+1}}.$
- $u_n = \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}}}.$
- $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$
- $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1.$
- $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$

14

- Montrer que $\sum_{k=1}^n e^{k^2} \sim e^{n^2}.$
- Montrer que $\sum_{k=1}^n k! \sim n!.$

15 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$$

- Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$

2. Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$$

existe et est non nulle.

3. En déduire un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$

On pourra avoir recours au lemme de Cesàro.

16 Soit la fonction

$$f : x \mapsto e^x + x$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution notée x_n .
- Montrer que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$
- Montrer que $x_n \sim \ln n.$
- Déterminer un équivalent de $x_n - \ln n.$