

17. Analyse asymptotique

Relations de comparaison

1 Soient $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \bar{I}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Montrer :

$$e^{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} e^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0.$$

2. On suppose que f est strictement positive sur un voisinage de a et

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x).$$

a. Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} +\infty$, montrer que

$$\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(g(x)).$$

b. Montrer que le résultat tient toujours si on a $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \neq 1$.

3. Déterminer un équivalent en 0 et $+\infty$ de $\ln(e^x - 1)$.

2

1. Montrer que $\ln(\ln x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln x)$.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

3 Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes aux voisinages précisés.

1. $x \mapsto \frac{x(\ln(1+x))^2}{3x+4}$ en 0.

2. $x \mapsto \frac{\sqrt{1+\tan^2 x} - 1}{\tan x}$ en 0.

3. $x \mapsto \frac{\sqrt{e^x - 1}}{(1+x)^5 - 1}$ en 0^+ .

4. $x \mapsto \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$ en 0.

5. $x \mapsto \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x + 1} \right)^x$ en $+\infty$.

1. $\frac{x^3}{4}$.
2. $\frac{x}{2}$.
3. $\frac{1}{5\sqrt{x}}$.
4. $-\frac{1}{4}$.
5. e^3 .

4

1. Déterminer un équivalent de $x^{\frac{1}{x}} - 1$ en $+\infty$.
2. En déduire un équivalent de $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x$ en $+\infty$.

$$1. \frac{\ln x}{x}.$$

$$2. x \left(x^{x^{\frac{1}{x}} - 1} - 1 \right) \sim \ln^2 x.$$

5 On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt.$$

Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Indication : chercher un encadrement.

L'encadrement $e^x \ln x \leq f(x) \leq e^{x+1} \ln x$ ne fonctionne pas, il faut donc être plus fin. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln x \int_x^{x+1} e^t \, dt \leq f(x) \leq \ln(x+1) \int_x^{x+1} e^t \, dt.$$

Ainsi, $e^x \ln x (e - 1) \leq f(x) \leq e^x \ln(x+1)(e - 1)$ pour tout x , et par encadrement :

$$f(x) \sim (e - 1)e^x \ln x.$$

6 Calculer les limites suivantes.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \text{ où } a, b > 0.$$

Développements limités

7 Déterminer les développements limités suivants.

1. DL₅(0) de $x \mapsto \ln(1+x) \sin x$.
2. DL₃(0) de $x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$.
3. DL₃(0) de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3+2x}}$.
4. DL₃(0) de $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$.
5. DL₃(0) de $x \mapsto \arcsin x$.
6. DL₄(0) de $x \mapsto \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch}(x)$.
7. DL₄(0) de $x \mapsto (\ln(1+x))^2$.

- $x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + o(x^5)$.
- $\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.
- On a $(1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} - \frac{5u^3}{16} + o(u^3)$.
 $\frac{1}{\sqrt{3+2x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{6} - \frac{5x^3}{54} + o(x^3) \right)$.
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{48} + o(x^3)$.
 DL de e^u avec $u = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{24} + o(x^3) \right)$.
 $\diamond u^2 = \frac{x^2}{4} \left(1 - \frac{x}{2} + o(x) \right)$
 $\diamond u^3 = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$.
 Donc $e^{\sqrt{1+x}} = e \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3) \right)$
 $= e \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{48} + o(x^3) \right)$.
- On a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. En primitivant
 $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
- $-1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{13x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.
- $x^2 - x^3 + \frac{11}{24}x^4 + o(x^4)$.

8 Déterminer les développements limités suivants.

- DL₃($\frac{\pi}{4}$) de $x \mapsto \sin x$.
- DL₃(1) de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$.
- DL₃($+\infty$) de $x \mapsto \sqrt{1 + \sin \frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}$.
- DL₂($+\infty$) de $x \mapsto \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}$.

- $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{6}(x - \frac{\pi}{4})^3 + o((x - \frac{\pi}{4})^3) \right)$.
- $(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.
- $\frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} - \frac{1}{48x^3} + o(\frac{1}{x^3})$.
- On écrit $\left(1 + \frac{1}{x} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \right)^{1/3} = \left(1 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^2}) \right)^{1/3}$
 $1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + o(\frac{1}{x^2})$.

9 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : x \mapsto x \operatorname{ch} x.$$

- Justifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note g sa bijection réciproque.
- Justifier que g admet un DL₅(0) sous la forme

$$g(y) = a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + o(y^5).$$

- Déterminer a_1, a_3, a_5 .

Calculs de limites

10 Calculer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^3} (\tan(\tan x) - \sin(\sin x))$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{x} \right)^{x^2}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\tan x} \right)$.

- $\frac{1}{3}$.
- $\frac{e^{2x}(e^{x^2-x}-1)}{\sin(\frac{\pi}{2}(1-x))} \sim -\frac{2}{\pi} x e^{2x}$ donc $-\frac{2e^2}{\pi}$.
- 1.
- $\sqrt{e}$.
- $\frac{2}{3}$. DL de th : comme $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$, on a
 $\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Etude de fonction

11 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}.$$

- Déterminer le DL₂(0) de f , en déduire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 et la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente.
- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote oblique en $+\infty$? En $-\infty$? Si oui, déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport aux asymptotes.

12 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$$

- Étudier l'existence d'asymptote à $\mathcal{C}_f$, ainsi que la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à celles-ci.
- Terminer l'étude, et donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Étude asymptotique des suites

13 Dans chacun des cas suivants, donner un équivalent de u_n dans chacun des cas suivants, et en déduire la limite de la suite (u_n) .

- $u_n = \frac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2+1}}$.
- $u_n = \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}}}$.
- $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.
- $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$.

5. $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

1. 1.
2. $\frac{1}{n}$.
3. $\frac{1}{n}$.
4. $\frac{\ln n}{n}$.
5. $\frac{1}{4n^{3/2}}$.

14

1. Montrer que $\sum_{k=1}^n e^{k^2} \sim e^{n^2}$.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^n k! \sim n!$.

15 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$$

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$$

existe et est non nulle.

3. En déduire un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On pourra avoir recours au lemme de Cesàro.

16

Soit la fonction

$$f : x \mapsto e^x + x$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution notée x_n .
2. Montrer que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim \ln n$.
4. Déterminer un équivalent de $x_n - \ln n$.