

16. Espaces vectoriels

Sous-espaces vectoriels

1 Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x\}$.
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$.
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x\}$.
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y + 1 = 0\}$.

2 Les parties suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. L'ensemble des suites bornées de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. L'ensemble des suites monotones de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. L'ensemble des suites convergentes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
4. L'ensemble des suites arithmétiques de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3 Les parties suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

1. L'ensemble des fonctions monotones de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. L'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui s'annulent en 0.
3. L'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui s'annulent en au moins un point.
4. L'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
5. L'ensemble des fonctions majorées de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
6. L'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui sont la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

4 On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 0, 1)$, $x = (1, 1, 1)$, $y = (1, 1, -1)$. Montrer que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(x, y)$.

5 Par des opérations sur les espaces vectoriels engendrés, montrer que

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}((X-1)^2, (X+1)^2, X^2-1).$$

6 On considère :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\},$$

$$G = \{(x - y, x + y, x - 3y), x, y \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

7 Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . Expliciter $\text{Vect}(E \setminus F)$.

8 Soient E un espace vectoriel et A, B des parties de E .

1. Comparer les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.
2. Montrer que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

9 Soient E un espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Familles libres, liées, bases

10 Dans les cas suivants, montrer que la famille de fonctions (f, g, h) est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. $f : x \mapsto e^x$, $g : x \mapsto e^{2x}$, $h : x \mapsto e^{-x}$.
2. $f : x \mapsto x$, $g : x \mapsto e^x$, $h : x \mapsto \cos x$.

11 Soient u, v, w les suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de termes généraux respectifs :

$$u_n = 1, \quad v_n = n^2, \quad w_n = 2^n.$$

Montrer que la famille (u, v, w) de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est libre.

12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $f_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

13 Déterminer l'ensemble des réels a tels que la famille de $\mathbb{R}^3$

$$((1, a, 2), (-1, 8, a), (1, 2, 1))$$

soit liée.

14 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$ (A est *nilpotente*). Montrer que $(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

15 Dans les deux cas suivants, montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qu'on précisera, et en déterminer une base.

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + 2y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$.
2. $F = \{P \in \mathbb{K}_2[x], P(0) = P(1)\}$.
3. $F = \{P \in \mathbb{K}_2[x], P(1) = P(2) = 0\}$.

16 Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$F = \text{Vect}((4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1))$$

17 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On note $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $x_1, \dots, x_n$: pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_i \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

Montrer que la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Sous-espaces supplémentaires

18 On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On considère

$$F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\},$$

$$G = \{f \in E, f \text{ est constante}\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

20 Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. On considère

$$F = \{P \in \mathbb{K}[X], A \mid P\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{K}[X]$.

21 Dans les deux cas suivants, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E .

1. $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et

$$F = \{f \in E, f(0) = 0\}.$$

2. $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et

$$F = \{f \in E, f(0) = 0, f'(0) = 0\}.$$