15. Dérivabilité

Dérivabilité, calcul de dérivées

1 Dans chacun des cas suivants, préciser le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction f.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 + |x|}$.
3. $f : x \mapsto x|x|$.
4. $f : x \mapsto (x^2 - 1)\arccos(x^2)$.

2 Étudier la dérivabilité de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x - \lfloor x \rfloor)(x - \lfloor x \rfloor - 1) \end{array}$$

3 Soit $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$, toujours noté f.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

4 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui s'annule une infinité de fois sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = f'(x) = 0$.

5 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction

$$f : x \mapsto x^{n-1} \ln x.$$

6 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto x^{2n}$. En calculant $f^{(n)}$ de deux manières différentes, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

7 On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $f(x) \neq 0$, la fonction $|f|$ est-elle dérivable en x ? Si oui calculer sa dérivée.
2. On suppose que $f(x) = 0$. Dans quel cas la fonction $|f|$ est-elle dérivable en x ? Calculer sa dérivée dans ce cas.

Théorèmes généraux sur la dérivation

8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et coercive, *i.e.* :

$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty, \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

9 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I qui s'annule en $n + 1$ points distincts de I. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.

10 *Règle de L'Hôpital.* Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On considère deux fonctions f, g continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, et on suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

1. Justifier que $g(a) \neq g(b)$, et montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
2. Montrer que
$$\text{si} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to a^+]{} \ell, \quad \text{alors} \quad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \xrightarrow[x \to a^+]{} \ell.$$
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}$.

11 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $[0, 1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

12 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$, $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

13 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 2$.

1. Montrer que si P admet n racines distinctes, alors P' est scindé et admet $n - 1$ racines distinctes.
2. Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé.

14 *Étude des suites récurrentes.* Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $K \in]0, 1[$ tel que

$$\forall x \in]a, b[, \quad |f'(x)| \leqslant K.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe $x^\star$ dans $[a, b]$.
2. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a, b]$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^\star$.