11. Limites – Continuité

Calculs de limite et continuité en un point

1 Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f au point précisé lorsqu'elle existe.

1. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ en 5.
2. $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x}-x$ en $+\infty$.
3. $f : x \mapsto \tan(x)\tan(2x)$ en $\frac{\pi}{2}$.
4. $f : x \mapsto \sin(\ln x)$ en $+\infty$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{x^5-1}{x^3-1}$ en 1.

2 On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \end{array}$$

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

3 Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$$

définie sur $[1,+\infty[$ n'a pas de limite en $+\infty$.

4 Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition.

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+\backslash\{3\} \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 3 \end{cases}$
3. $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin(x)}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x-\cos x}{x-\pi/4} & \text{si } x \neq \pi/4 \\ \sqrt{2} & \text{sinon} \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x} & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ 2 & \text{si } x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

5 Étudier la continuité et l'existence de prolongement par continuité de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x} \end{array}$$

6 Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor} \end{array}$$

est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Limites et fonctions continues

7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que dire de f ?

8 Existe-t-il un réel x tel que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ admet une limite en x ?

9 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f a une limite finie en 0 et

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(2x) = f(x).$$

10 Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que

$$f(2x) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Monter que $\ell = 0$.

11 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et en 1 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x^2) = f(x).$$

12 Soit $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

13 Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

14 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f \;:\; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{sinon, où } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \wedge q = 1. \end{cases}$$

Déterminer les points de continuité de f.

Théorèmes généraux sur la continuité

15 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$. Que dire de la fonction f ?

16 Montrer que tout polynôme de degré impair admet une racine réelle.

17 Soient ℓ, ℓ' et une fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell, \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell'.$$

Montrer que f est bornée.

18 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe sur $[0,1]$.

19 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

20 Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, telles que

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = \max_{x \in [a,b]} g(x).$$

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

21 Un cycliste parcourt 30 km en 1 heure.

1. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 10 minutes pendant lequel le cycliste a parcouru 5 km.
2. Existe-t-il toujours un intervalle de temps de 40 minutes pendant lequel il a parcouru 20 km ?

22 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction coercive, *i.e.* :

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum.

23 On suppose que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue et surjective. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = f(x)$ admet une infinité de solutions.

24 Soit f une fonction réelle continue et injective sur un intervalle I. Montrer que f est strictement monotone sur I.

Pour aller plus loin

25 Déterminer une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1]$ discontinue en tout point.