

9. Suites numériques

Suites et limites

1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente à valeurs dans \mathbb{Z} . Que dire de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

2 Lemme de Cesàro. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels. On introduit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k,$$

On souhaite montrer que si $(u_n)_n$ converge, alors $(v_n)_n$ converge vers la même limite.

1. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
2. En déduire que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.
Montrer que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Existence de limite

3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}.$$

1. Montrer qu'on a $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n .
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4 Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire pour $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

5 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$. On définit les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} a_0 = a, & b_0 = b, \\ \forall n \in \mathbb{N}, & a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}. \end{cases}$$

Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies et qu'elles convergent vers une même limite.

Propriétés des suites

6 Donner dans chaque cas un exemple de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie les propriétés suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni majorée ni minorée.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée, non majorée, et ne tend pas vers $+\infty$.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et converge vers 0 mais n'est pas décroissante à partir d'un certain rang.

7 Pour tout entier $n \geq 3$, on note

$$\begin{aligned} f_n : \quad \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \quad \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - n \ln x \end{aligned}$$

1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qu'on notera u_n et v_n , avec $u_n < v_n$. Vérifier que

$$\forall n \geq 3, \quad 0 < u_n < n < v_n.$$

- b. Donner la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. a. Montrer que pour tout $n \geq 3$, $1 < u_n < e$.
- b. Pour tout $n \geq 3$, déterminer le signe de $f_n(u_{n+1})$, et en déduire le sens de variation de $(u_n)_{n \geq 3}$.
- c. Montrer que $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente, puis établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Suites extraites

8 Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que $H_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

9 Montrer qu'un suite réelle croissante qui a une sous-suite majorée converge.

10 Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle non majorée, alors elle admet une sous-suite qui diverge vers $+\infty$.

11 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

12 Montrer que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

13 *Une autre preuve de Bolzano-Weierstrass.* Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On pose

$$A = \{n \in \mathbb{N}, \forall k > n, u_k < u_n\}.$$

1. On suppose que A est infini. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède une sous-suite décroissante.
2. On suppose que A est fini. Construire une sous-suite croissante de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. En déduire que toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.

Suites récurrentes

14 On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$

Selon les valeurs de u_0 , déterminer la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et sa limite éventuelle.

15 Soit $u_0 \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + |u_n|}{2}.$$

Suites particulières

16 Pour chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes, déterminer une expression explicite du terme général de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2(u_n)^2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, u_1 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{3}{u_{n+1}} - \frac{2}{u_n} \end{cases}$

17 On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2v_n, \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2u_n + 3v_n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Calculer alors u_n et v_n en fonction de n .

18 Déterminer une expression explicite du terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n \end{cases}$$