# 8. Compléments sur les nombres réels

## Bornes supérieures, bornes inférieures

**1** Dans les cas suivants, déterminer $\inf A$ et $\sup A$ s'ils existent.

1. $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\}$.
2. $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

**2** Soient $A, B$ deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \leqslant \sup B$.
2. Montrer que $\sup(A \cup B)$ existe, et
$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$

**3** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle *distance de $x$ à $A$* le réel
$$\mathrm{d}(x, A) = \inf\{|x-a|,\ a \in A\}.$$

1. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel $\mathrm{d}(x, A)$ est bien défini.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$|\mathrm{d}(x, A) - \mathrm{d}(y, A)| \leqslant |y - x|.$$
3. Si $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, calculer $\mathrm{d}(x, A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**4** Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction croissante. On souhaite montrer que $f$ admet un point fixe sur $[0, 1]$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.
On pose
$$A = \{x \in [0, 1],\ f(x) \leqslant x\}.$$

1. Montrer que $A$ admet une borne inférieure, qu'on notera $x^\star$.
2. Montrer que $f(x^\star) = x^\star$.
3. Si $f : [0, 1[ \to [0, 1[$, le résultat est-il toujours valable ?

## Densité

**5** Montrer que
$$\mathbb{D} =, \left\{\frac{k}{2^n},\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$
est dense dans $\mathbb{R}$.

**6** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\quad \left\{\begin{array}{rcl} f(x+y) &=& f(x) + f(y), \\ f(xy) &=& f(x)f(y) \end{array}\right. \qquad (\star)$$

1. Déterminer $f(0)$, $f(1)$.
2. Déterminer $f(x)$ lorsque $x \in \mathbb{N}$, puis $x \in \mathbb{Z}$, puis $x \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $f(x) \in \mathbb{R}_+$, et en déduire que $f$ est croissante.
4. Montrer que $f = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$.