7. Applications – Relations binaires

Applications

1 Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que

1. $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$.
2. $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
3. $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
4. $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

2 Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'application f est injective, surjective, bijective.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^\star \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$
4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star & \to & \mathbb{Q} \\ (p, q) & \mapsto & p + \frac{1}{q} \end{array}$
5. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$

3 Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

est bijective. Qu'en est-il de $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^3 \end{array}$?

4 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

5 Soit $f : E \to E$ une application telle que

$$f \circ f \circ f = f.$$

Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

6 L'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\lfloor x \rfloor - x \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ?

On pourra commencer par tracer le graphe de f.

7 *Exemples de bijections*

1. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^\star$.
2. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non monotone.
3. Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\star$.

8 Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathscr{P}(E)$.

Indication : si $f \in \mathscr{F}(E, \mathscr{P}(E))$, on pourra introduire l'ensemble $\{x \in E,\ x \notin f(x)\}$.

Image directe, image réciproque

9 Soient $f : E \to F$ une application et $A, B \in \mathscr{P}(E)$.

1. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   Montrer qu'on n'a pas égalité en général.

10 Soient $f : E \to F$ une application et $C, D \in \mathscr{P}(F)$.

1. Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
2. Montrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
3. Montrer que $f^{-1}(\overline{C}) = \overline{f^{-1}(C)}$.

11 Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que

$$\begin{array}{cl} & f \text{ est injective} \\ \Leftrightarrow & \forall A, B \in \mathscr{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B). \end{array}$$

12 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 + z + 1 \end{array}$$

1. Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C}^\star)$ et $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(\mathbb{C}^\star)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.

13 Soit $f : E \to F$ une application.

1. *a.* Montrer : $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A))$.
   b. Montrer : $\forall B \in \mathscr{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) \subset B$.
2. *a.* Montrer :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall A \in \mathscr{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A)).$$

b. Montrer :

$$f \text{ surjective } \Leftrightarrow \forall B \in \mathscr{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) = B.$$

Relations binaires

14 On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer la classe d'équivalence de x pour $\mathscr{R}$.
3. Donner un ensemble de représentants des classes d'équivalence de $\mathscr{R}$.

15 On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{Z}$ par :

$$n\mathscr{R}m \Leftrightarrow n + m \text{ est pair.}$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$, et déterminer ses classes d'équivalences.

16 Soient A un ensemble non vide et $E = \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$. On introduit la relation $\leqslant$ sur E définie par

$$f \leqslant g \Leftrightarrow \forall x \in A,\ f(x) \leqslant g(x).$$

1. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E.
2. Déterminer une condition sir le nombre d'éléments de A pour que $\leqslant$ soit une relation d'ordre totale.

17 *Ordre lexicographique sur* $\mathbb{R}_+^2$ On introduit la relation $\preccurlyeq$ sur $E = \mathbb{R}_+^2$ définie par

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leqslant y').$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre totale sur E. On l'appelle l'*ordre lexicographique*.
2. Montrer que $A = [0, 1]^2$ est majorée pour l'ordre $\preccurlyeq$, et que A admet un plus grand élément.
3. Soit $B = [0, 1[\times[0, 1[$.
   a. Montrer que B n'admet pas de plus grand élément pour $\preccurlyeq$.
   b. Déterminer l'ensemble $\mathscr{M}(B)$ des majorants de B, et montrer que $\mathscr{M}(B)$ admet un plus petit élément.