

## 5. Trigonométrie

### Fonctions circulaires

- 1 Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

- 2 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.

1.  $\cos x = \sin(3x)$ .
2.  $\tan(3x) = \sqrt{3}$ .
3.  $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$ .
4.  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ .
5.  $2 \cos^2 x + \sin x = 1$ .
6.  $2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos(2x) = 0$ .

- 3 Déterminer pour quelles valeurs de  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$\tan x \geq 2 \sin x.$$

### Fonctions circulaires réciproques

- 4 Simplifier les expressions suivantes pour les valeurs de  $x \in \mathbb{R}$  telles qu'elles sont bien définies.

1.  $\cos(2 \arccos x)$ .
2.  $\cos(2 \arcsin x)$ .
3.  $\sin(2 \arccos x)$ .
4.  $\cos(2 \arctan x)$ .
5.  $\sin(2 \arctan x)$ .
6.  $\tan(2 \arcsin x)$ .

- 5 Montrer que

$$2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}.$$

- 6 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$\arctan x + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}.$$

- 7 Simplifier les expressions suivantes, pour les réels  $x$  tels qu'elles sont bien définies.

1.  $\arctan \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$ .
2.  $\arcsin \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$ .

3.  $\arcsin(1 - 2x^2)$ .

- 8 Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in [-1, 1]$  :

$$\arccos x = \arcsin x.$$

- 9 Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}.$$

- 10 Soient  $x_1, \dots, x_5$  des réels. Montrer qu'il existe des entiers distincts  $i, j \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$  tels que

$$0 \leq \frac{x_j - x_i}{1 + x_i x_j} \leq 1.$$