

5. Trigonométrie

Fonctions circulaires

1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

2 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

1. $\cos x = \sin(3x)$.
2. $\tan(3x) = \sqrt{3}$.
3. $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$.
4. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.
5. $2\cos^2 x + \sin x = 1$.
6. $2\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$.

3 Déterminer pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\tan x \geq 2\sin x.$$

3. $\arcsin(1 - 2x^2)$.

8 Résoudre l'équation d'inconnue $x \in [-1, 1]$:

$$\arccos x = \arcsin x.$$

9 Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1 - x)}{\sqrt{x}}.$$

10 Soient x_1, \dots, x_5 des réels. Montrer qu'il existe des entiers distincts $i, j \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ tels que

$$0 \leq \frac{x_j - x_i}{1 + x_i x_j} \leq 1.$$

Fonctions circulaires réciproques

4 Simplifier les expressions suivantes pour les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles qu'elles sont bien définies.

1. $\cos(2\arccos x)$.
2. $\cos(2\arcsin x)$.
3. $\sin(2\arccos x)$.
4. $\cos(2\arctan x)$.
5. $\sin(2\arctan x)$.
6. $\tan(2\arcsin x)$.

5 Montrer que

$$2\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}.$$

6 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$\arctan x + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}.$$

7 Simplifier les expressions suivantes, pour les réels x tels qu'elles sont bien définies.

1. $\arctan\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right)$.
2. $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$.