3. Calcul algébrique dans $\mathbb{R}$

Equations, inéquations

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(x+5)(4x-1)+x^2-25 = 0$.
2. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{24}$.
3. $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+3} = 2$.
4. $|2-3x|+|2x-3| = 5$.
5. $\sqrt{1-2x} = |x+7|$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{2x-1}{x+2} \leqslant 1$.
2. $3+\sqrt{x-1} < x$.
3. $2x+1 \leqslant \sqrt{x^2+8}$.
4. $\sqrt{x+1} > \sqrt{2x^2+x}$.
5. $|x+1| \leqslant 2$.
6. $|x-1| \leqslant x^2-x+1$.
7. $|2x-4| \leqslant |x-1|$.

Inégalités

3 Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}.$$
2. Montrer que
$$xy+xz+yz \leqslant x^2+y^2+z^2.$$
3. Montrer que
$$(x+y)^2 \leqslant 2x^2+2y^2.$$
4. Montrer que
$$(x+y)^4 \leqslant 8(x^4+y^4).$$

4 Montrer que pour tous $x, y \in [0,1]$,
$$0 \leqslant x^2+y^2-xy \leqslant 1.$$

5 Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x+z|+|y+z|.$$

6 Soient a, b deux réels positifs.

1. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqslant \sqrt{a+b}$.
2. On suppose que $b \leqslant a$. Montrer que
$$\sqrt{a-b} \geqslant \sqrt{a}-\sqrt{b}.$$
En déduire que si $a, b \in \mathbb{R}$,
$$\sqrt{|a-b|} \geqslant \left|\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|}\right|.$$

Partie entière

7 Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1.$$

8 Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que
$$\lfloor kx\rfloor = k\lfloor x\rfloor \Leftrightarrow x-\lfloor x\rfloor < \frac{1}{k}.$$

9 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor 2x\rfloor.$$

10 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que
$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor.$$