Sommes et produits

Calculs de sommes et produits

1 Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=0}^{n}(2^k - k + n + 1)$.
2. $\sum_{k=0}^{n} 2^k\, 3^{n-k}$.
3. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2$.
4. $\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)$.

2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\, k^2 \;=\; (-1)^n\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer les sommes et produits suivants à l'aide d'un télescopage.

$$1.\ \sum_{k=1}^{n} k\, k!\,, \quad 2.\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\,, \quad 3.\ \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

4 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$.

5 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. À l'aide du changement d'indice $\ell = k-1$, calculer la somme

$$S \;=\; \sum_{k=1}^{n} k\, 2^k.$$

6 *Transformation d'Abel.* Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère des réels $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$, et on pose, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$A_k = \sum_{i=0}^{n} a_i, \quad \text{et, si } k < n, \quad b_k = B_{k+1} - B_k.$$

1. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, exprimer a_k en fonction de A_k et A_{k-1}.
2. En déduire :
$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k \;=\; A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$
3. *Application.* Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, 2^k$.

7 Trouver toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ dans $(\mathbb{R}_+^\star)^{\mathbb{N}^\star}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^3 \;=\; \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2.$$

8 Soit $N \in \mathbb{N}^\star$.

1. Calculer la somme $\sum_{k=1}^{N} k\, k!$.
2. Montrer que pour tout $n \in [\![0,(N+1)!-1]\!]$, il existe $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{N}$ tels que $a_k \in [\![0,k]\!]$ pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, et
$$n \;=\; \sum_{k=0}^{N} a_k\, k!$$
3. Montrer que les entiers $a_0, \ldots, a_N$ de la question précédente sont uniques.

Coefficients binomiaux

9 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

10 Montrer que si $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant m$, alors

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

11 Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. En utilisant la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}.$$

12 *Formule de Vandermonde.* Soient $n, m, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n+m$. Montrer que

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

Qu'exprime cette formule dans le cas où $n = k = m$?

Sommes doubles

13 Calculer les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i+j.$
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2.$
3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j).$
4. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j).$
5. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij.$
6. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}.$
7. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}.$

14 Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on note a_k l'entier dont l'écriture en base 10 est constituée de k fois le chiffre 1. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$