Interrogation de cours – 9

Corrigé

1. Énoncer le lemme de Gauss.

> Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$, alors $a \mid c$..

2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Exprimer $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ à l'aide de $a \wedge b$ et $a \vee b$.

> On a $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \cup b)\mathbb{Z}$.

3. Soient $a = 84$ et $b = 30$. Déterminer $a \wedge b$, et préciser une relation de Bézout impliquant les entiers a et b.

> L'algorithme d'Euclide étendu donne $a \wedge b = 6$ et la relation de Bézout $-84 + 3 \times 30 = 6$.

4. Quelle est la congruence de 3^{91} modulo 7 ? Justifier.

> On remarque que $3^2 \equiv 2\,[7]$, puis $3^3 \equiv -1\,[7]$. Ainsi, $3^{91} = 3^{3\times 30+1} = (3^3)^{30} \times 3 \equiv (-1)^{30} \times 3\,[7] \equiv 3\,[7]$.

5. *a.* Déterminer tous les entiers tels que $3x \equiv 2\,[7]$.

> On a $3 \times 5 - 7 \times 2 = 1$, donc $3 \times 5 \equiv 1\,[7]$ (on a inversé 3 modulo 7). Ainsi,
>
> $$3x \equiv 2\,[7] \iff 5 \times 3x \equiv 5 \times 2\,[7] \iff x \equiv 10\,[7] \iff x \equiv 3\,[7].$$
>
> Les solutions sont donc tous les entiers de la forme $7k + 3$, où $k \in \mathbb{Z}$.

   b. Résoudre l'équation diophantienne $3x + 7y = 2$, d'inconnues $x, y \in \mathbb{Z}$.

> *Analyse.* Si (x, y) est un couple solution, alors en écrivant l'égalité modulo 7 on obtient $3x \equiv 2\,[7]$, donc d'après la question précédente, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 7k + 3$. Ainsi, on a $3(7k + 3) + 7y = 2$, ce qui se récrit $21k + 7y = -7$, ou encore $y = -3k - 1$.
>
> *Synthèse.* Si $(x, y) = (7k + 3, -3k - 1)$, alors $3x + 7y = 2$, donc (x, y) est solution.
>
> Finalement, les couples solutions sont les couples de la forme $(7k + 3, -3k - 1)$, où $k \in \mathbb{Z}$.
>
> *On pouvait aussi bien sûr résoudre l'équation diophantienne à l'aide d'une solution particulière.*