Interrogation de cours – 8

Corrigé

1. Soiten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et a, ℓ des réels.

   a. Donner la définition quantifiée de $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

   b. Donner la définition quantifiée de $f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   $\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > B \Rightarrow f(x) > A.$

   c. Donner la définition quantifiée de $f(x) \underset{x\to \ell}{\longrightarrow} -\infty$.

   $\forall A < 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) < A.$

2. Donner un énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

   Voir cours.

3. Énoncer le théorème des bornes atteintes.

   Voir cours.

4. *a.* Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$.

   Si $x > 0$, on a

   $$\sqrt{x^2+2x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+2x} - x)(\sqrt{x^2+2x} + x)}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1}$$

   car $x > 0$. Ainsi, $\sqrt{x^2 + 2x} - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

   C'est une limite du cours. On la retrouve en remarquant que

   $$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ln'(1) = 1.$$

c. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\arctan x}{x}$, puis $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+\arctan x}{x}$.

On a $\dfrac{x+\arctan x}{x} = 1 + \dfrac{\arctan x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $\arctan x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$, donc $\dfrac{\arctan x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par ailleurs $\dfrac{\arctan x}{x} = \dfrac{\arctan x - \arctan 0}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \arctan'(0) = 1$, donc $\dfrac{x+\arctan x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$.