Interrogation de cours – 7

Corrigé

1. Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Donner, pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$, l'expression du coefficient $(AB)_{i,j}$ en fonction des coefficients de A et B.

On a pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$, $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k, l, k', l' \in [\![1,n]\!]$. Expliciter le produit matriciel de matrices élémentaires : $E_{k,l}E_{k',l'}$.

On a $E_{k,l}E_{k',l'} = \delta_{l,k'} E_{k,l'}$.

3. Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Expliciter $(AB)^\top$.

On a $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

4. Donner la définition d'une matrice symétrique.

Une matrice symétrique est une matrice carrée A qui vérifie $A^\top = A$.

5. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 0 \\ 3x & -y & -z & = 0 \\ 5x & -4y & -3z & = 0 \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 0 \\ 3x & -y & -z & = 0 \\ 5x & -4y & -3z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & +z & = 0 & \\ & -7y & -4z & = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ & -14y & -8z & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} & +2y & +z & = 0 \\ & -7\boxed{y} & -4z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = \frac{z}{7} \\ \boxed{y} = -\frac{4z}{7} \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est donné par $\left\{\left(\frac{z}{7}, -\frac{4z}{7}, z\right),\ z \in \mathbb{R}\right\} = \{z\,(1, -4, 7),\ z \in \mathbb{R}\}$.

6. Inverser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On effectue l'algorithme de Gauss-Jordan sur la matrice A.

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right. \qquad \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\0&0&-1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\2&-1&-3\end{pmatrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&0\\2&1&1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right. \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}2&-1&-2\\-2&2&2\\2&-1&-3\end{pmatrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\0&1&-1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}\right. \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&1\\-2&1&3\end{pmatrix}\right.$$

Ainsi, l'inverse de la matrice A est donnée par $A^{-1} = \begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&1\\-2&1&3\end{pmatrix}$.