Interrogation de cours – 5

Corrigé

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Préciser à quelle condition A admet une borne supérieure, et donner la définition de $\sup A$.

> Si A est une partie non vide et majorée, alors elle admet un plus petit majorant, qu'on appelle la borne supérieure de A.

2. Compléter l'énoncé suivant : si $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure,

$$M = \sup A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \dots \end{cases}$$

> $$M = \sup A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x > M - \varepsilon \end{cases}$$

3. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Donner la définition de "A est dense dans $\mathbb{R}$".

> A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $a \in [x, y]$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
   a. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ" sous la forme d'une proposition quantifiée.

   > $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$

   b. Donner la définition de "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$" sous la forme d'une proposition quantifiée.

   > $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n > A.$

5. Écrire le complexe $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ sous forme exponentielle.

> On a : $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$.
> On peut aussi utiliser l'angle moitié : $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right) = 2\cos\frac{\pi}{12}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$. Comme $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\frac{\pi}{12} > 0$, donc il s'agit bien de la forme exponentielle.

6. On considère $z = \dfrac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i}$.
   a. Que vaut $|z|$?

Soit $w = 1 + \sqrt{2} - \mathrm{i}$. On a $|z| = \left|\frac{w}{\bar{w}}\right| = \frac{|w|}{|\bar{w}|} = \frac{|w|}{|w|} = 1$.

b. Écrire z sous forme algébrique.

On a

$$\frac{1+\sqrt{2}-\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}} = \frac{(1+\sqrt{2}-\mathrm{i})^2}{(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})(1+\sqrt{2}-\mathrm{i})} = \frac{2+2\sqrt{2}-2\mathrm{i}(1+\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}-\mathrm{i}(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}$$

Par conséquent, $\frac{1+\sqrt{2}-\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}} = \frac{1+\sqrt{2}-\mathrm{i}(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$.