

Interrogation de cours – 15

Corrigé

1. Soient E, F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, donner la définition de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

$$\text{Ker } f = \{x \in E, f(x) = 0_F\}, \text{Im } f = \{f(x), x \in E\}.$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y, x + y) \end{aligned}$$

- a. Déterminer $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$.
b. L'application f est-elle injective, surjective ?

- a. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x, y) \in \text{Ker } f$ si et seulement si $(x + y, x - y, x + y) = (0, 0, 0)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}, \text{ ce qui équivaut à } x = y = 0.$$

Ainsi, $\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$. Par ailleurs, on a

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(1, 0), f(0, 1)) = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, -1, 1)).$$

- b. Comme $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, l'application f est injective. Comme $\text{rg } f = 2$, on a $\text{rg } f \neq \dim \mathbb{R}^3$, donc f n'est pas surjective.

3. Énoncer le théorème du rang.

Soient E, F sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels où E est de dimension finie. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f.$$

4. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

Déterminer le rang de f . L'endomorphisme f est-il surjectif ? injectif ?

On a

$$\text{rg } f = \text{rg}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \text{rg}(0, 1, 2X, 3X^2) = \text{rg}(1, 2X, 3X^2) = 3$$

car la famille $(1, 2X, 3X^2)$ est échelonnée en degré donc libre. Comme $\text{rg } f \neq \dim \mathbb{R}_3[X]$, on en déduit que f n'est ni injectif ni surjectif.

5. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- a. f est un projecteur de E si et seulement si $f^2 = f$.

Dans ce cas, f est un projecteur sur $\text{Im } f$, parallèlement à $\text{Ker } f$.

b. f est une symétrie de E si et seulement si $f^2 = \text{Id}_E$.

Dans ce cas, f est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$, parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.