

Interrogation de cours – 13

Corrigé

1. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E . La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si ...

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

2. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, -x - y), x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1)). \end{aligned}$$

Ainsi, en notant $u_1 = (1, 0, -1)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$, la famille (u_1, u_2) est génératrice du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$. Comme les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, la famille (u_1, u_2) est libre, c'est donc une base de F .

3. On note

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto e^x, \quad h : x \mapsto e^{2x}.$$

Montrer que la famille (f, g, h) est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $af + bg + ch = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$, c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}, a + be^x + ce^{2x} = 0$.

Comme on a aussi $af' + bg' + ch' = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$, et $af'' + bg'' + ch'' = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad be^x + 2ce^{2x} = 0, \quad \text{et} \quad be^x + 4ce^{2x} = 0$$

En choisissant $x = 0$ dans chacune de ces égalités, on obtient

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc la famille est libre.

On pouvait aussi raisonner à l'aide de passages à la limite, ou de seules évaluations de $af + bg + ch$.

4. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On introduit les sous-espaces vectoriels de E :

$$F = \{f \in E, f(0) = 0\}, \quad \text{et} \quad G = \{f \in E, f \text{ est constante}\}.$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

- Soit $f \in F \cap G$. La fonction f est constante et $f(0) = 0$, donc f est la fonction constante nulle. On a donc $F \cap G = \{0_E\}$, et F et G sont en somme directe.
- Par ailleurs, si $f \in E$, alors $f = f - f(0) + f(0)$. Comme $f - f(0) \in F$ et $f(0) \in G$, on a $f \in F + G$. On a donc montré $E = F + G$.

Ceci montre bien que $E = F \oplus G$.

On pouvait aussi raisonner par analyse-synthèse.

5. Donner une base de $F = \text{Vect}((2, 1, 3), (5, 4, 0), (-1, 0, -4))$. La famille $((2, 1, 3), (5, 4, 0), (-1, 0, -4))$ est-elle libre ?

On a

$$\begin{aligned}\text{Vect}((2, 1, 3), (5, 4, 0), (-1, 0, -4)) &= \text{Vect}((-1, 0, -4), (2, 1, 3), (5, 4, 0)) \\ &= \text{Vect}((-1, 0, -4), (0, 1, -5), (0, 4, -20)) \\ &= \text{Vect}((-1, 0, -4), (0, 1, -5)).\end{aligned}$$

Les vecteurs $(-1, 0, -4)$ et $(0, 1, -5)$ étant non colinéaires, $((-1, 0, -4), (0, 1, -5))$ est libre, et est donc une base de F .

D'après ce qui précède, $((2, 1, 3), (5, 4, 0), (-1, 0, -4))$ n'est pas libre.