

Interrogation de cours – 10

Corrigé

1. Donner la définition d'un groupe.

Un groupe est un ensemble G muni d'une loi $\star$ associative tel que :

- ◊ G possède un élément neutre,
- ◊ tout élément de G est inversible.

2. Énoncer le théorème de caractérisation des sous-groupes d'un groupe G : si $H \subset G$, alors

H est un sous-groupe de $G \Leftrightarrow \dots$

Avec la notation multiplicative,

$$H \text{ est un sous-groupe de } G \Leftrightarrow \begin{cases} 1_G \in H \\ \forall x, y \in H, xy^{-1} \in H \end{cases}$$

3. Dans chacun des cas suivants, préciser pour quelle loi l'ensemble définit un groupe : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}^\star$, $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{S}(E)$, où E est un ensemble.

$(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}^\star, \times)$, $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$, $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ sont des groupes.

4. Donner la définition d'un morphisme de groupes d'un groupe $(G, \star)$ dans un groupe (G', Δ) .

Un morphisme de groupe de $(G, \star)$ dans (G', Δ) est une application $f : G \rightarrow G'$ telle que pour tous $x, y \in G$, on a $f(x \star y) = f(x) \Delta f(y)$.

5. Soient E un ensemble muni d'une loi interne $\star$ associative d'élément neutre e , et $x, y \in E$ inversibles. Justifier que $x \star y$ est inversible, et donner son inverse.

On a $(x \star y) \star (y^{-1} \star x^{-1}) = x \star (y \star y^{-1}) \star x^{-1} = x \star x^{-1} = e$. De même, $(y^{-1} \star x^{-1}) \star (x \star y) = y^{-1} \star y = e$. Ainsi, $x \star y$ est inversible, et $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.