Interrogation de cours – 1

Corrigé

1. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.
   a. Écrire la négation de "$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$".
   b. Écrire la contraposée de "$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$".

a. Négation de "$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$" : "$\mathcal{P} \wedge (\neg\, \mathcal{Q})$".
b. Contraposée de "$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$" : "$\neg\, \mathcal{Q} \Rightarrow \neg\, \mathcal{P}$".

2. On considère $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire la négation des propositions suivantes.
   a. "n est pair et $n \geqslant 4$".
   b. "$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \geqslant A,\ f(x) > M$".
   c. "$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0)$".

a. "n est impair ou $n < 4$".
b. "$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \geqslant A,\ f(x) \leqslant M$".
c. "$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \wedge x > 0$".

3. Écrire le principe de récurrence sous la forme d'un théorème.

Soit $\mathcal{P}(n)$ un prédicat. On suppose :
- $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
- "$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$" est vraie.

Alors, "$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$" est vraie.

4. *a.* Montrer : "$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \exists y \in \mathbb{R}_+,\ y < x$".
   b. La proposion "$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \big((\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon) \Rightarrow x = 0\big)$" est-elle vraie ? Justifier par une démonstration.

a. Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrons $\exists y \in \mathbb{R}_+,\ y < x$.
Posons $y = 0$, on a alors $y \in \mathbb{R}_+$ et $y < x$.
D'où le résultat.

b. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons $(\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
Supposons $\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon$, et montrons que $x = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\frac{1}{n} > 0$, donc d'après l'hypothèse, $x < \frac{1}{n}$. On a donc $0 \leqslant x < \frac{1}{n}$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, le théorème d'encadrement entraîne que $x = 0$.
Ainsi, la proposition est vraie.

Autre rédaction, en ayant recours à la contraposée :

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour montrer $(\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$, on raisonne par contraposée : montrons $x \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ x \geqslant \varepsilon)$.
Supposons $x \neq 0$, ce qui entraîne que $x > 0$. Montrons $\exists \varepsilon > 0,\ x \geqslant \varepsilon$.
On pose $\varepsilon = x$. On a alors $\varepsilon > 0$ car $x > 0$, et on a bien $x \geqslant \varepsilon$.

La proposition est alors vraie.