

Cahier de vacances

1

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Montrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de :

$$u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right).$$

2

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n).$$

1.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
 - b. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = h(\operatorname{Arctan} x).$$

3

Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$$

avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1.
 - a. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
 - b. Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .

Indication : discuter suivant les valeurs de a .

4

CCINP. On pose

$$P_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-X)^k}{k!}.$$

1. Montrer que

$$P'_{n+1} = -P_n - \frac{X^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

et

$$P''_{n+1} = P_n.$$

2.
 - a. Par récurrence, montrer la stricte décroissance de la fonction polynomiale p_n associée à P_n . Montrer que p_n admet une unique valeur d'annulation sur $\mathbb{R}$, notée u_n .

b. Montrer que

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{X}{2k+1}\right).$$

3.
 - a. Montrer que $u_n \in [1, 2n+1]$.
 - b. Montrer que la suite (u_n) est monotone.

5

Soit, pour $n \geq 4$,

$$f_n : x \mapsto x^{3n} - \sqrt{n}x + 1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [1, 2]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Étudier la convergence de la suite de terme général $\varepsilon_n = x_n - 1$.
3. Trouver un équivalent de ε_n .
4. Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n .

6

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.

2. On pose

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}.$$

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \neq -1$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz utilisée dans la question précédente.

7

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$. Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

3. Prouver que l'implication

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Rightarrow f' \text{ admet une limite finie en } x_0$$

est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction

$$g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad g(0) = 0.$$

8 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs et $l \in]0, 1[$.

1. Démontrer que si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire judicieusement la définition de la limite, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} ?$$

9

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels positifs, non nulles à partir d'un certain rang. Montrer que

$$u_n \sim v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \ln n \sin(1/n)}{\sqrt{n+3} - 1}.$$

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

10

1. Soit (u_n) une suite décroissante, positive, de limite nulle.

- a. Démontrer que la série

$$\sum (-1)^k u_k$$

est convergente.

Indication : on pourra considérer (S_{2n}) et (S_{2n+1}) , avec

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k.$$

- b. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de cette série.

2. On pose, pour $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}.$$

- a. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 1} f_n.$$

- b. Étudier sa convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

11 On considère la série

$$\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}).$$

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$,

$$\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

où α est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire que la série converge.
3. Cette série converge-t-elle absolument ?

12 IMT

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$, où

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin n}.$$

13 CCINP

Soient $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. Pour $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n} + e^{in\varphi}}.$$

1. Montrer que

$$u_n = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}} - \frac{e^{in(\theta+\varphi)}}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

2. On suppose que θ et φ sont des multiples de π . Quelle est la nature de $\sum u_n$?

14 On pose

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

15 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Prouver que

$$x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

2. a. Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.

- b. Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. On suppose désormais $\alpha = 0$.

- a. Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.

- b. Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
- c. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

16

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
- a. Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
- b. Donner la définition de f différentiable en $(0,0)$.
2. On considère

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

17 CCINP. Soit $f : [0,2] \times [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $(x,y) \mapsto x^2 - 2x + xy + y^2$. Trouver les extrema globaux de f .

18 CCINP. Pour tous réels x, y , on pose

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

1. Quels sont les points critiques de f ?
2. Est-ce que f possède un extremum global ?
3. Quels sont les extrema locaux de f ?

19 CCINP. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. On considère l'équation fonctionnelle suivante, portant sur des fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y). \quad (*)$$

1. Résoudre le problème de Cauchy

$$(E_1): y'' = -\omega^2 y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

2. Résoudre le problème de Cauchy

$$(E_2): y'' = \omega^2 y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

3. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y).$$

En déduire que la fonction ch est solution de $(*)$.

4. Soit f une solution de $(*)$.

Montrer que $f(0) \in \{0,1\}$, et que si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle.

Montrer que si $f(0) = 1$, alors $f'(0) = 0$.

5. Trouver toutes les solutions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de $(*)$.

20 On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

21 CCINP.

On étudie sur $]0, 1]$ l'équation différentielle

$$(E): \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

1. Donner les solutions de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^\alpha$.
2. Chercher les solutions de (E) sous la forme $x \mapsto \frac{z(x)}{x^2}$.

22 Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

On pose

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P - P'.$$

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
- a. sans utiliser de matrice de f ;
- b. en utilisant une matrice de f .
2. Soit $Q \in E$.
Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. (hors programme en début d'année) f est-il diagonalisable ?

23 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$f(M) = AM.$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f ?$$

24 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que

$$E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2.$$

2. a. Démontrer que

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2.$$

- b. Démontrer que

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f.$$

25 Soit P le plan d'équation

$$x + y + z = 0$$

et D la droite d'équation

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

1. Vérifier que

$$\mathbb{R}^3 = P \oplus D.$$

2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

26 $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes. Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

a. Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

b. Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .

4. *Application* : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.

Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

27 *IMT*. Soient P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + 3z = 0$ et D la droite vectorielle engendrée par $(2, 2, 1)$. Montrer que P et D sont supplémentaires et déterminer les matrices dans la base canonique du projecteur sur P parallèlement à D et de la symétrie par rapport à P parallèlement à D .

28 *CCINP*.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

Montrer que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$ si et seulement si $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

29 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$. On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1. a. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

b. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2. Soit

$$E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}.$$

Prouver que l'ensemble

$$\left\{ \left(\int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \right), f \in E \right\}$$

admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

30 Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E . Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

a. Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b. Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

31 Soit $a < b$ deux réels.

1. Soit h continue et positive sur $[a, b]$. Démontrer que

$$\int_a^b h(x) dx = 0 \Rightarrow h = 0.$$

2. Soit E l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$. On pose

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Démontrer que ceci définit un produit scalaire.

3. Majorer

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$$

en utilisant Cauchy-Schwarz.

32 Soit E l'espace des fonctions continues 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

définit un produit scalaire.

2. Soit $F = \text{Vect}(\cos x, \cos 2x)$. Déterminer le projeté orthogonal de $u(x) = \sin^2 x$ sur F .

33 On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\varphi(A, A') = \text{tr}({}^t A A').$$

On note

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel.

2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

3. Déterminer le projeté orthogonal de

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sur $\mathcal{F}^\perp$.

4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

34 Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.

On admet l'existence du projeté orthogonal.

On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'.$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire.

2. Calculer la distance de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

au sous-espace des matrices triangulaires supérieures.

35 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n . On pose :

$$\forall (A, B) \in E^2, \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB).$$

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E . Une matrice A est dite antisymétrique si ${}^tA = -A$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

a. Prouver que

$$E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}).$$

b. Prouver que

$$A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R}).$$

3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E . Déterminer $F^\perp$.

36 Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère une droite de vecteur directeur unitaire u et p la projection orthogonale sur cette droite.

1. Donner l'expression de $p(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^3$.

2. Soit P le plan d'équation $x - 2y + z = 0$. Donner la matrice de la projection orthogonale q sur ce plan dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

37 Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. On considère une famille $(u_1, \dots, u_n)$ telle que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\|u_k\| = \frac{1}{n}.$$

On pose $v_k = e_k + u_k$.

La famille $(v_1, \dots, v_n)$ est-elle une base de E ?

38 Trouver un équivalent de

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

en utilisant :

1. une comparaison série-intégrale,
2. les sommes de Riemann.

39 On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan x)^n dx.$$

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
2. Calculer $I_n + I_{n+2}$.
3. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (indication : télescopage).
4. Prouver la convergence de $\sum (-1)^n I_n$ et calculer sa somme.

40

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

41 Soit $n \geq 2$ et $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2. Soit

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|.$$

Montrer que

$$S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}.$$

42 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^n = e^{i\pi/3}$,
2. $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

43 Soit $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Pour $n \geq 1$, on écrit :

$$(3+4i)^n = A_n + iB_n.$$

1. Montrer que $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n \in \mathbb{U}$.
2. Exprimer A_{n+1} et B_{n+1} en fonction de A_n et B_n .
3. Montrer que $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$.

4. Déterminer les restes de A_n et B_n modulo 5.
5. En déduire que $\bigcup_{n \geq 1} \mathbb{U}_n \neq \mathbb{U}$.

44 Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx).$$

45

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
 - a. Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base

$$(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n).$$

- b. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :

a est racine de P d'ordre r

si et seulement si

$$P^{(r)}(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0.$$

2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme

$$P = X^5 + aX^2 + bX,$$

et factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

46 Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

1. Montrer que pour tous $b_0, b_1, \dots, b_n$, il existe un unique polynôme P tel que

$$\deg P \leq n \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Expliciter le polynôme L_k tel que

$$L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

3. Montrer que pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p.$$

47 CCINP. Soit $P = (X + 1)^n - 1$.

1. Déterminer les racines de P et factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Calculer

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

48 Soit $P \in \mathbb{Q}_n[X]$. Montrer l'équivalence entre :

1. pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$,
2. pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(k) \in \mathbb{Z}$,
3. il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $k \in \llbracket m, m+n \rrbracket$, $P(k) \in \mathbb{Z}$.

Indication : on pourra introduire les polynômes

$$H_k = \frac{1}{k!} X(X-1) \cdots (X-k+1).$$

49 CCINP.

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (probabilité de 6 égale à $\frac{1}{2}$ pour les dés pipés).
 - a. On tire un dé au hasard et on obtient un 6. Quelle est la probabilité qu'il soit pipé ?
 - b. On tire un dé au hasard et on obtient n fois le chiffre 6. Calculer p_n .
 - c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ et interpréter.

50 On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

U_1 contient 2 boules blanches et 3 noires, U_2 contient 4 blanches et 3 noires.

On effectue des tirages successifs :

- on choisit une urne au hasard,
- on tire une boule et on la remet,
- si la boule est blanche, on tire dans U_1 au tirage suivant,
- sinon on tire dans U_2 .

On note B_n l'événement « la boule tirée au n -ième tirage est blanche » et $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1 .
2. Montrer que $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire p_n .

51 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

52 Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
 - a. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

b. Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

a. Déterminer la loi de X .

b. Déterminer la loi de Y .

53 Un employé effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X . Justifier.

2. L'employé rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

a. Déterminer $\mathbb{P}(Y = k \mid X = i)$.

b. Montrer que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale.

c. Déterminer espérance et variance de Z .

54 Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On considère N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ indépendantes de loi géométrique de paramètre p .

1. Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$ et $\mathbb{P}(X_i > n)$.

2. On pose $Y = \min(X_1, \dots, X_N)$.

a. Déterminer la loi de Y .

b. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

55 Soit $n \geq 3$. On place aléatoirement n boules dans 3 compartiments.

On note X le nombre de compartiments vides.

1. Déterminer les valeurs possibles de X .

2. a. Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$.

b. Déterminer la loi de X .

3. a. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X)$.

56 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et 2 boules noires numérotées 1 et 2. On tire sans remise.

On note X le rang de la première boule blanche, et Y le rang de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X .

2. Déterminer la loi de Y .

57 Soient $n \in \mathbb{N}$ et X, Y deux variables aléatoires sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ vérifiant

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1. Étudier les lois marginales et l'indépendance.

2. Identifier la loi de $X - 1$, calculer espérance et variance.

3. Calculer $\mathbb{E}(e^X)$.

58 CCINP – Petit théorème de Fermat

1. Soient $a, b, p \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $p \nmid a = 1$ et $p \nmid b = 1$, alors $p \nmid (ab) = 1$.

2. Soit p un nombre premier.

a. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k} k!$, puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.

b. Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p}.$$

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que p ne divise pas n ,

$$n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

59 CCINP – Système de congruence

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que le système

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 4 \pmod{8} \end{cases} \quad (S)$$

n'a pas de solution x dans $\mathbb{Z}$.

2. a. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

b. Soient a, b des entiers premiers entre eux, et $c \in \mathbb{Z}$. Montrer :

$$(a \mid c \text{ et } b \mid c) \Leftrightarrow (ab) \mid c.$$

3. On considère le système

$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 5 \pmod{16} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases} \quad (S')$$

a. Déterminer une solution particulière x_0 de (S') dans $\mathbb{Z}$.

b. Déduire des questions précédentes toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S') .

60 Centrale. Montrer que

$$H = \{x + y\sqrt{3}, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

61 Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Pour tout $a \in G$, on pose

$$\begin{aligned} \sigma_a : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto axa^{-1} \end{aligned}$$

1. Montrer que pour tout $a \in G$, σ_a est un automorphisme de G , et préciser $(\sigma_a)^{-1}$.

2. Montrer que $\varphi : a \mapsto \sigma_a$ définit un morphisme de groupes de $(G, \cdot)$ dans $(\text{Aut}(G), \circ)$.

3. On note

$$S = \{\sigma_a, a \in G\}.$$

Montrer que $(S, \circ)$ est un groupe.

62 Soit A un anneau. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0_A$.

1. Soient $x, y \in A$. Montrer que si xy est nilpotent, alors yx est nilpotent.
2. Soient x, y deux éléments nilpotents de A qui commutent. Montrer que $x + y$ est nilpotent.
3. Montrer que si $x \in A$ est nilpotent, alors $1_A - x$ est inversible, et déterminer son inverse.