

## Cahier de vacances

1

1. Par hypothèse,  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow v_n \neq 0$ . Ainsi la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est définie à partir du rang  $N_0$ . De plus, comme  $u_n \sim v_n$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ . Alors,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $N \geq N_0$  et  $\forall n \geq N, \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \varepsilon$ . Prenons  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Fixons un entier  $N$  vérifiant cette propriété. Ainsi,  $\forall n \geq N, -\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2}$ , donc  $\frac{u_n}{v_n} \geq \frac{1}{2}$  et ainsi  $\frac{u_n}{v_n} > 0$ . On en déduit que  $u_n$  et  $v_n$  sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Au voisinage de  $+\infty$ ,

$$\sinh\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \tan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc  $u_n \sim -\frac{1}{6n^3}$ . On en déduit que, à partir d'un certain rang,  $u_n$  est négatif.

2

On pose  $f(x) = \operatorname{Arctan} x$ .

1. a. *Premier cas* : Si  $u_1 < u_0$  Puisque la fonction  $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} x$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  alors  $\operatorname{Arctan}(u_1) < \operatorname{Arctan}(u_0)$  c'est-à-dire  $u_2 < u_1$ . Par récurrence, on prouve que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$ . Donc la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.
- Deuxième cas* : Si  $u_1 > u_0$  Par un raisonnement similaire, on prouve que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.
- Troisième cas* : Si  $u_1 = u_0$  La suite  $(u_n)$  est constante.
- Pour connaître les variations de la suite  $(u_n)$ , il faut donc déterminer le signe de  $u_1 - u_0$ , c'est-à-dire le signe de  $\operatorname{Arctan}(u_0) - u_0$ . On pose alors  $g(x) = \operatorname{Arctan} x - x$  et on étudie le signe de la fonction  $g$ . On a  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{-x^2}{1+x^2}$  et donc  $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) < 0$ . Donc  $g$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  et comme  $g(0) = 0$  alors :  $\forall x \in ]0, +\infty[, g(x) < 0$  et  $\forall x \in ]-\infty, 0[, g(x) > 0$ . On a donc trois cas suivant le signe de  $x_0$  : - Si  $x_0 > 0$ , la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante. - Si  $x_0 = 0$ , la suite  $(u_n)$  est constante. - Si  $x_0 < 0$ , la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.
2. La fonction  $g$  étant strictement décroissante et continue sur  $\mathbb{R}$ , elle induit une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . 0 admet donc un unique antécédent par  $g$  et, comme  $g(0) = 0$ , alors 0 est le seul point fixe de  $f$ . Donc si la suite  $(u_n)$  converge, elle converge vers 0, le seul point fixe de  $f$ .
- Premier cas* : Si  $u_0 > 0$  L'intervalle  $]0, +\infty[$  étant stable par  $f$ , on a par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ . Donc la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0, donc elle converge et ce vers 0, unique point fixe de  $f$ .
- Deuxième cas* : Si  $u_0 < 0$  Par un raisonnement similaire, on prouve que  $(u_n)$  est croissante et majorée par 0, donc elle converge vers 0.
- Troisième cas* : Si  $u_0 = 0$  La suite  $(u_n)$  est constante.
- Conclusion :  $\forall u_0 \in \mathbb{R}, (u_n)$  converge vers 0.
3. Soit  $h$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que,  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Considérons la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = x$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$ . On a alors  $h(x) = h(u_0) = h(\operatorname{Arctan}(u_0)) = h(u_1) = h(\operatorname{Arctan}(u_1)) = h(u_2) = \dots$ . Par récurrence, on prouve que,  $\forall n \in \mathbb{N}, h(x) = h(u_n)$ . De plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(u_n) = h(0)$  par convergence de la suite  $(u_n)$  vers 0 et par continuité de  $h$ . On obtient ainsi :  $h(x) = h(0)$  et donc  $h$  est une fonction constante. Réciproquement, toutes les fonctions constantes conviennent. Conclusion : Seules les fonctions constantes répondent au problème.

3

1. a. Montrons que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes. La suite nulle appartient à  $E$  (obtenue pour  $(u_0, u_1) = (0, 0)$ ). Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de  $E$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Montrons que  $w = u + \lambda v \in E$ . On a  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + \lambda v_n$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $w_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2}$ . Or  $(u, v) \in E^2$ , donc  $w_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n + \lambda(2av_{n+1} + 4(ia-1)v_n)$  c'est-à-dire  $w_{n+2} = 2a(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + 4(ia-1)(u_n + \lambda v_n)$  ou encore  $w_{n+2} = 2aw_{n+1} + 4(ia-1)w_n$ . Donc  $w \in E$ . Donc  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
2. On considère l'application  $\varphi$  définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

Par construction,  $\varphi$  est linéaire et bijective. Donc  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit que  $\dim E = \dim \mathbb{C}^2 = 2$ .

3. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On introduit l'équation caractéristique (E) :  $r^2 - 2ar - 4(ia - 1) = 0$ . On a deux possibilités :

- si (E) admet deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$  avec  $(\alpha, \beta)$  que l'on détermine à partir des conditions initiales.

- si (E) a une unique racine double  $r$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (\alpha n + \beta)r^n$  avec  $(\alpha, \beta)$  que l'on détermine à partir des conditions initiales.

Le discriminant réduit de (E) est  $\Delta' = a^2 + 4ia - 4 = (a + 2i)^2$ .

- *Premier cas* :  $a = -2i$   $r = a = -2i$  est racine double de (E). Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (\alpha n + \beta)(-2i)^n$ . Or  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1$ , donc  $1 = \beta$  et  $1 = (\alpha + \beta)(-2i)$ . On en déduit que  $\alpha = \frac{i}{2} - 1$  et  $\beta = 1$ .

- *Deuxième cas* :  $a \neq -2i$  On a deux racines distinctes  $r_1 = 2(a + i)$  et  $r_2 = -2i$ . Donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \alpha (2(a + i))^n + \beta (-2i)^n$ . Or  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1$ , donc  $\alpha + \beta = 1$  et  $2(a + i)\alpha - 2i\beta = 1$ . On en déduit, après résolution, que

$$\alpha = \frac{1 + 2i}{2a + 4i} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2a + 2i - 1}{2a + 4i}.$$

**4** Calculons :

$$P'_{n+1} = \left( \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-X)^k}{k!} \right)' = - \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-X)^{k-1}}{(k-1)!} = - \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-X)^k}{(k)!} = - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-X)^k}{(k)!} - \frac{X^{2n+2}}{(2n+2)!} = -P_n - \frac{X^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

On a alors :

$$P''_{n+1} = -P'_n - \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} = P_{n-1} + \frac{X^{2n}}{(2n)!} - \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} = P_n$$

Par récurrence, l'hérédité est triviale ( $P_0 = 1 - X$  est décroissante et s'annule une unique fois)

Concentrons nous sur l'hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose  $p_n$  strictement décroissante et qui s'annule en une unique valeur notée  $u_n$ . On a  $p''_{n+1} = p_n$  donc  $p'_{n+1}$  est croissante sur  $[-\infty, u_n]$  et décroissante sur  $[u_n, +\infty]$ . Elle admet alors un maximum en  $u_n$ . Or  $p'_{n+1}(u_n) = -p_n(u_n) - \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0 - \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} = -\frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} < 0$  (car il est évident que  $u_n \neq 0$ ). On en déduit que le maximum de  $P'_{n+1}$  est strictement négatif et donc que  $p'_{n+1}$  est strictement négative :  $p_{n+1}$  est strictement décroissante. Or c'est une fonction polynomiale donc elle s'annule une unique fois sur  $\mathbb{R}$ .

Enfin  $P_n$  est un polynôme de degré impair et strictement décroissant, donc il admet une unique solution  $u_n$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a alors en regroupant termes pairs et impairs :

$$P_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-X)^k}{k!} = \sum_{p=0}^n \frac{(-X)^{2p}}{(2p)!} + \frac{(-X)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^n \frac{X^{2p}}{(2p)!} \left(1 - \frac{X}{2p+1}\right).$$

On calcule alors  $P(1) > 0$  et

$$P(2n+1) = \sum_{p=0}^n \frac{(2n+1)^{2p}}{(2p)!} \underbrace{\left(1 - \frac{2n+1}{2k+1}\right)}_{<0} < 0$$

D'après le TVI, un fonction polynomiale étant continue,  $u_n \in [1, 2n+1]$ .

Calculons enfin  $P_{n+1}(u_n) = P_n(u_n) + \frac{u_n^{2n}}{(2n)!} - \frac{u_n^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{u_n^{2n}}{(2n)!} \left(1 - \frac{u_n}{2n+1}\right)$ . On  $u_n < 2n+1$  donc  $\left(1 - \frac{u_n}{2n+1}\right) > 0$  et ainsi  $P_{n+1}(u_n) > 0$ . On en déduit d'après les variations de  $P_{n+1}$  que  $u_n < u_{n+1}$  : la suite  $u_n$  est monotone croissante (strictement).

**5**

1.  $f_n$  est dérivable de dérivée  $f'_n(x) = 3nx^{3n-1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}(3\sqrt{n}x^{3n-1} - 1)$ . Si  $x \geq 1$ , cette quantité est strictement positive, donc  $f_n$  est strictement croissante sur  $[1, 2]$  en particulier. Or  $f_n(1) = 2 - \sqrt{n} < 0$  car  $n \geq 4$  et  $f_n(2) = 2^{3n} - 2\sqrt{n} + 1 > 0$ . On en déduit que  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution entre 1 et 2.

2. Nous allons utiliser une inégalité classique : pour  $u \geq 0$ ,  $\ln(1+u) \geq u - \frac{u^2}{2}$  ; qu'on peut démontrer par une étude de fonction.

$$\begin{aligned}
f_n(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) &= (1 + \frac{1}{\sqrt{n}})^{3n} - \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 1 \\
&= \exp(3n \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})) - \sqrt{n} \\
&\geq \exp(3\sqrt{n} - \frac{3}{2}) - \sqrt{n} \\
&\geq \exp(3\sqrt{n} - \frac{3}{2}) - \sqrt{n} \\
&\geq 1 + 3\sqrt{n} - \frac{3}{2} - \sqrt{n} \\
&\geq 2\sqrt{n} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

car  $\exp(u) \geq 1 + u$ . On en déduit donc que  $f(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \geq 0$  et donc  $1 \leq x_n \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Par encadrement, on a donc  $\epsilon_n \rightarrow 0$ .

3. On a alors  $x_n^{3n} = \sqrt{n}x_n - 1$  donc  $x_n^{3n-1} \sim \sqrt{n}$ . c'est à dire  $3n \ln(x_n) = \ln(\sqrt{n}x_n - 1) = \ln(\sqrt{n}x_n) + \ln(1 - \frac{1}{\sqrt{n}x_n})$ . D'où  $6n \ln(x_n) = \ln(n) + 2 \ln(x_n) + 2 \ln(1 - \frac{1}{\sqrt{n}x_n})$  dont on déduit  $6n \ln(x_n) \sim \ln(n)$ . Or  $\ln(x_n) \sim x_n - 1$  donc  $x_n - 1 \sim \frac{\ln(n)}{6n}$ . On en déduit  $x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{6n} + o(\frac{\ln(n)}{n})$ .
4. On cherche un terme en plus. On a

$$\begin{aligned}
x_n &= (\sqrt{n}x_n - 1)^{1/3n} \\
&= \exp(\frac{1}{3n} \ln(\sqrt{n}x_n - 1)) \\
&= \exp(\frac{1}{3n} \ln(\sqrt{n} + \frac{\ln(n)}{6\sqrt{n}} - 1 + o(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}))) \\
&= \exp(\frac{\ln(n)}{6n} + \frac{1}{3n} \ln(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\ln(n)}{6n} + o(\frac{\ln(n)}{n}))) \\
&= \exp(\frac{\ln(n)}{6n} + \frac{1}{3n} \ln(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}}))) \\
&= \exp(\frac{\ln(n)}{6n} - \frac{1}{3n\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n\sqrt{n}})) \\
&= 1 + \frac{\ln(n)}{6n} - \frac{1}{3n\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n\sqrt{n}})
\end{aligned}$$

6

1.  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et  $h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . On prouve, par récurrence, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$$

2.  $g$  et  $h$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  donc, d'après la formule de Leibniz,  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} e^{2x} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n! e^{2x} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}.$$

3. Notons  $(P_n)$  la propriété : Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont  $n$  fois dérivables sur  $I$  alors,  $fg$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et :

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Prouvons que  $(P_n)$  est vraie par récurrence sur  $n$ . La propriété est vraie pour  $n = 0$  et pour  $n = 1$  (dérivée d'un produit). Supposons la propriété vraie au rang  $n \geq 0$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions  $n + 1$  fois dérivables sur  $I$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont, en particulier,  $n$  fois dérivables sur  $I$  et donc par hypothèse de récurrence la fonction  $fg$  l'est aussi

avec  $\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$ .

Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , les fonctions  $f^{(n-k)}$  et  $g^{(k)}$  sont dérivables sur  $I$  donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction  $(fg)^{(n)}$  est encore dérivable sur  $I$ . Ainsi la fonction  $fg$  est  $(n + 1)$  fois dérivable et :  $\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) =$

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right)$ . En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient :

$$\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

C'est-à-dire  $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \binom{n}{0} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \binom{n}{n} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x)$ .

Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ . On remarque également que  $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$  et  $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$ . On en déduit que  $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$ . Donc  $(P_{n+1})$  est vraie.

7

1. Théorème des accroissements finis : Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors  $\exists c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .
2. On pose  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ . Soit  $h \neq 0$  tel que  $x_0 + h \in [a, b]$ . En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction  $f$ , entre  $x_0$  et  $x_0 + h$ , on peut affirmer qu'il existe  $c_h$  strictement compris entre  $x_0$  et  $x_0 + h$  tel que  $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c_h)h$ . Quand  $h \rightarrow 0$  (avec  $h \neq 0$ ), on a, par encadrement,  $c_h \rightarrow x_0$ . Donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} f'(c_h) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l$ . On en déduit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = l$ .
3. La fonction  $g$  proposée dans l'indication est évidemment dérivable sur  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .  $g$  est également dérivable en 0 car  $\frac{1}{h} (g(h) - g(0)) = h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$ . Or  $\lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$  car  $|h \sin\left(\frac{1}{h}\right)| \leq |h|$ . Donc,  $g$  est dérivable en 0 et  $g'(0) = 0$ .  
Cependant,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ .  $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  (car  $|2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 2|x|$ ), mais  $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'admet pas de limite en 0. Donc  $g'$  n'a pas de limite en 0.

8

1. Par hypothèse :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| \leq \varepsilon$ . (1) Prenons  $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$ . Fixons un entier  $N$  vérifiant (1). Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| \leq \frac{1-l}{2}$ . Et donc,  $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+l}{2}$ . On pose  $q = \frac{1+l}{2}$ . On a donc  $q \in ]0, 1[$ . On a alors  $\forall n \geq N, u_{n+1} \leq qu_n$ . On en déduit, par récurrence, que  $\forall n \geq N, u_n \leq q^{n-N} u_N$ . Or  $\sum_{n \geq N} q^{n-N} u_N = u_N q^{-N} \sum_{n \geq N} q^n$  et  $\sum_{n \geq N} q^n$  converge car  $q \in ]0, 1[$ . Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs,  $\sum u_n$  converge.
2. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{n^n}$ .  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = e^{-n \ln(1 + \frac{1}{n})}$ . Or  $-n \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim_{+\infty} -1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1$ . Donc  $\sum u_n$  converge.

9

1. Par hypothèse,  $\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies v_n \neq 0$ . Ainsi la suite  $\left( \frac{u_n}{v_n} \right)$  est définie à partir du rang  $N_0$ . De plus, on suppose que  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ . Alors,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $N \geq N_0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$ . (1) Prenons  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Fixons un entier  $N$  vérifiant (1). Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$ . C'est-à-dire,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies -\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2}$ . On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$ .  
*Premier cas* : Si  $\sum v_n$  converge D'après (1),  $\forall n \geq N, u_n \leq \frac{3}{2} v_n$ . Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs,  $\sum u_n$  converge.  
*Deuxième cas* : Si  $\sum v_n$  diverge D'après (1),  $\forall n \geq N, \frac{1}{2} v_n \leq u_n$ . Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs,  $\sum u_n$  diverge. Par symétrie de la relation d'équivalence, on obtient le résultat.
2. On pose  $\forall n \geq 2, u_n = \frac{((-1)^n + i) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)}$ .  $|u_n| = \frac{\sqrt{2} \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)}$ . De plus  $|u_n| \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$  On a  $n^{\frac{5}{4}} v_n = \frac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{1}{4}}}$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{5}{4}} v_n = 0$ . On en déduit que  $\sum v_n$  converge. D'après 1.,  $\sum |u_n|$  converge. Donc  $\sum u_n$  converge absolument. De

plus, la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , donc  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge.

10

1. a.  $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$ , donc  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. De même  $S_{2n+3} - S_{2n+1} \geq 0$ , donc  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. De plus  $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) = 0$ . On en déduit que les suites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes. Donc elles convergent et ce vers une même limite. Comme  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  recouvrent l'ensemble des termes de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on en déduit que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge aussi vers cette limite. Ce qui signifie que la série  $\sum (-1)^k u_k$  converge.

b. Le reste  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq u_{n+1}$ .

2. On pose :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ . On a alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = (-1)^n u_n(x)$  avec  $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$ .

- a. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $x < 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = +\infty$ , donc  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  diverge grossièrement. Si  $x \geq 0$ , alors  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est positive, décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$ . Donc d'après 1.(a),  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  converge. Donc  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$ .

Remarque : pour  $x > 0$ , on a aussi convergence absolue de  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ . En effet, pour tout réel  $x > 0$ ,  $n^2 |f_n(x)| = ne^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc, au voisinage de  $+\infty$ ,  $|f_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

- b. Comme  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$ , on peut poser  $\forall x \in [0, +\infty[, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ . Alors, comme,  $\forall x \in [0, +\infty[, (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est positive, décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$ , on en déduit, d'après 1.(b), que :  $\forall x \in [0, +\infty[, |R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$ . Et donc  $\forall x \in [0, +\infty[, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ . (majoration indépendante de  $x$ ) Et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , alors  $(R_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $[0, +\infty[$ . C'est-à-dire  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ .

11

1.  $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$ . Or, au voisinage de  $+\infty$ ,

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc, au voisinage de  $+\infty$ ,  $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

2. On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$ .

D'après 1.,  $v_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ . Donc  $v_n = \frac{3\pi}{8} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

Or  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  converge (d'après le critère spécial des séries alternées) et  $\sum_{n \geq 1} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  converge (par critère de domination), donc  $\sum_{n \geq 1} v_n$  converge.

3. D'après le développement asymptotique du 2., on a  $|v_n| \sim_{+\infty} \frac{3\pi}{8n}$ . Or  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge (série harmonique), donc  $\sum_{n \geq 1} |v_n|$  diverge, c'est-à-dire  $\sum_{n \geq 1} v_n$  ne converge pas absolument.

12

On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}(1 + \sin(n)n^{-3/4})} = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} \left(1 - \frac{\sin(n)}{n^{3/4}} + o\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}}_{v_n} + \underbrace{\frac{(-1)^n \sin(n)}{n^{3/2}}}_{w_n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Or  $v_n$  est le terme général d'une série convergente (par critère des séries alternées) et  $w_n$  est le terme général d'une série absolument convergente (par comparaison à une série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$  convergente). Donc  $\sum u_n$  converge.

**13** Calculons :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n} + e^{in\varphi}} \\ &= \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}} - \frac{e^{in(\theta+\varphi)}}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Posons  $v_n = \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$  et  $w_n = \frac{e^{in(\theta+\varphi)}}{n}$ . Le  $O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$  est le terme général d'une série absolument convergente, la convergence de  $\sum u_n$  dépend de la convergence de  $\sum v_n + w_n$ .

- Si  $\theta$  et  $\varphi$  sont des multiples impairs de  $\pi$ , alors  $v_n$  est le terme général d'une série alternée donc convergente mais  $w_n$  est divergente. Le  $O$  étant le terme général d'une série absolument convergente, on en déduit  $\sum u_n$  diverge. - Si  $\theta$  est un multiple pair et  $\varphi$  un multiple impair alors  $\sum v_n$  diverge et  $\sum w_n$  converge donc  $\sum u_n$  diverge. - Si  $\theta$  est un multiple impair et  $\varphi$  un multiple pair, alors  $\sum v_n$  converge ainsi que  $\sum w_n$  par CSSA. Donc  $\sum u_n$  converge - Si  $\theta$  et  $\varphi$  sont des multiples pairs, alors  $v_n + w_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} = \frac{\sqrt{n}-1}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$  qui est le terme général d'une série divergente. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum u_n$  diverge.

**14**

- Par opérations sur les fonctions continues,  $f$  est continue sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . On considère la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$  définie par  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ . On a  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq \|(x,y)\|_2$  et  $|y| \leq \|(x,y)\|_2$ . On en déduit que  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, |f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|x||y|}{\|(x,y)\|_2} \leq \frac{(\|(x,y)\|_2)^2}{\|(x,y)\|_2} = \|(x,y)\|_2 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ . On en déduit que  $f$  est continue en  $(0,0)$ . Ainsi  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Par opérations sur les fonctions admettant des dérivées partielles,  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . En  $(0,0) : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t,0) - f(0,0)) = 0$ , donc  $f$  admet une dérivée partielle en  $(0,0)$  par rapport à sa première variable et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ . De même,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(0,t) - f(0,0)) = 0$ . Donc  $f$  admet une dérivée partielle en  $(0,0)$  par rapport à sa seconde variable et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ .
- D'après le cours,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existent et sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ . Or,  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ . On remarque que  $\forall x > 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ . On en déduit que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  n'est pas continue en  $(0,0)$ . Donc  $f$  n'est pas de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**15**

- Soit  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ .  $x^2 + y^2 - xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2xy) = \frac{1}{2}(x-y)^2 \geq 0$ . Donc  $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .
- Soit  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ . D'après 1.,  $x^2 + y^2 - xy = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$ . Ainsi,  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$ .
  - D'après les théorèmes généraux,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .  
D'après 1., pour  $(x,y) \neq (0,0), 0 \leq f(x,y) \leq \frac{2y^4}{x^2+y^2} \leq \frac{2(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$ .  
Ainsi,  $0 \leq f(x,y) \leq 2(x^2+y^2) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ . Or :  $f$  est continue en  $(0,0) \iff f(x,y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(0,0) = \alpha$ . Donc :  
 $f$  est continue en  $(0,0) \iff \alpha = 0$ . Conclusion :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \iff \alpha = 0$ .
- D'après les théorèmes généraux,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y^4(2x-y)}{(x^2+y^2-xy)^2}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^5-3xy^4+4x^2y^3}{(x^2+y^2-xy)^2}$ .
  - Pour tout  $x \neq 0, \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  existe et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ .  
Pour tout  $y \neq 0, \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = y \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$  existe et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ .

- c. Pour montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , montrons que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ . Pour cela, il suffit de montrer qu'elles sont continues en  $(0, 0)$ .

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , on note  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . On a alors  $|x| \leq r$  et  $|y| \leq r$ . De plus,  $(x, y) \rightarrow (0, 0) \iff r \rightarrow 0$ . D'après 1. et l'inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| \leq 4 \frac{|y^4(2x - y)|}{(x^2 + y^2)^2} \leq 4 \frac{r^4(2r + r)}{r^4} = 12r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| \leq 4 \frac{|2y^5 - 3xy^4 + 4x^2y^3|}{(x^2 + y^2)^2} \leq 4 \frac{2r^5 + 3r^5 + 4r^5}{r^4} = 36r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues en  $(0, 0)$  et par suite sur  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

16

1. a.  $f$  est continue en  $(0, 0) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| < \alpha \implies |f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$ .  $\|\cdot\|$  désigne une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^2$  puisque toutes les normes sont équivalentes sur  $\mathbb{R}^2$  (espace de dimension finie).
- b.  $f$  est différentiable en  $(0, 0) \iff \exists L \in \mathcal{L}_C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) /$  au voisinage de  $(0, 0)$ ,  $f(x, y) = f(0, 0) + L(x, y) + o(\|(x, y)\|)$ .  
Remarque : Comme  $\mathbb{R}^2$  est de dimension finie, si  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  alors  $L \in \mathcal{L}_C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .
2. On notera  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^2$ . On remarque que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq \|(x, y)\| \text{ et } |y| \leq \|(x, y)\|. \quad (\star)$$

- a.  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  et  $(x, y) \mapsto xy(x^2 - y^2)$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  donc,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Continuité en  $(0, 0)$  : On a, en utilisant  $(\star)$  et l'inégalité triangulaire,  $|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \cdot |y| \leq \|(x, y)\|^2$ . Donc  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .
- b.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existent sur  $\mathbb{R}^2$  et sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .  $f$  admet des dérivées partielles sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et elles sont continues sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . De plus,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (\star\star)$$

Existence des dérivées partielles en  $(0, 0)$  :  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$ ; donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existe et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ . De même,  $\forall y \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$ , donc  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$ ; donc  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existe et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Continuité des dérivées partielles en  $(0, 0)$  : d'après  $(\star)$  et  $(\star\star)$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq \frac{6\|(x, y)\|^5}{\|(x, y)\|^4} = 6\|(x, y)\| \text{ et } \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{6\|(x, y)\|^5}{\|(x, y)\|^4} = 6\|(x, y)\|.$$

Donc  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ . Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues en  $(0, 0)$ . Conclusion :  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existent et sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ , donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

17

On commence par calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2 + y$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y$ . Les points critiques sont donc les points vérifiant :

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

On calcule  $f(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{16}{9} - \frac{8}{3} - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = -\frac{4}{3}$ .

Ce point est le seul candidat pour être extremum global dans l'intérieur de l'ensemble de définition. Etudions  $f(x, y) + \frac{4}{3}$  pour savoir si l'on a ici un minimum ou maximum global. On pose dans la suite  $x' = x - \frac{4}{3}$  et  $y' = y + \frac{2}{3}$ .

$$\begin{aligned}
f(x, y) + \frac{4}{3} &= x^2 - 2x + xy + y^2 + \frac{4}{3} \\
&= \left(x' + \frac{4}{3}\right)^2 - 2\left(x' + \frac{4}{3}\right) + \left(x' + \frac{4}{3}\right)\left(y' - \frac{2}{3}\right) + \left(y' - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} \\
&= x'^2 + \frac{8}{3}x' + \frac{16}{9} - 2x' - \frac{8}{3} + x'y' - \frac{2}{3}x' + \frac{4}{3}y' - \frac{8}{9} + y'^2 - \frac{4}{3}y' + \frac{4}{9} + \frac{4}{3} \\
&= x'^2 + x'y' + y'^2 \\
&= \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2}(x' + y')^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Le point critique est donc un minimum global.

Cherchons à voir s'il existe un maximum global. On a  $f(x, y) = x^2 - 2x + xy + y^2 = (x-1)^2 - 1 + xy + y^2 = (x-1)^2 + y^2 + xy - 1 \leq 1 + 1 + 0 - 1 = 1$ . Or  $f(-1, 0) = 1$  donc c'est un majorant atteint : c'est un maximum. On peut ensuite vérifier que ce maximum global n'est atteint qu'en ce point.

18

Calculons les dérivées partielles qui existent par théorèmes généraux.  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x$ . Les points critiques sont alors définis par les équations  $x^2 = y$  et  $y^2 = x$  ce qui donne  $x(x-1)(x^2+x+1) = 0$ , donc  $x = 0$  ou  $x = 1$  et les couples  $(x, y) = (0, 0)$  ou  $(x, y) = (1, 1)$ .

Or  $f(1, 1) = -1$ ,  $f(0, 0) = 0$ ,  $f(-1, -1) = 1$  (donc  $(0, 0)$  n'est pas un extremum global) et  $f(-2, -2) = -28$ . DONC  $(1, 1)$  n'est pas un extremum global.

On a  $f(t, t) = 2t^3 - 3t^2 = t^2(2t - 3)$ . Le point  $(0, 0)$  est un maximum local dans cette direction. Par ailleurs  $f(t, -t) = t^3 - t^3 + 3t^2 = 3t^2$ . Le point  $(0, 0)$  est un minimum local dans cette direction. Donc  $(0, 0)$  n'est pas un extremum local.

Considérons maintenant le point  $(1, 1)$ . Posons  $x' = x - 1$  et  $y' = y - 1$ .

$$\begin{aligned}
f(x, y) + 1 &= (x' + 1)^3 + (y' + 1)^3 - 3(x' + 1)(y' + 1) + 1 \\
&= x'^3 + 3x'^2 + 3x' + 1 + y'^3 + 3y'^2 + 3y' + 1 - 3x'y' - 3x' - 3y' - 3 + 1 \\
&= x'^3 + 3x'^2 + y'^3 + 3y'^2 - 3x'y' \\
&\geq x'^3 + 3x'^2 + y'^3 + 3y'^2 - \frac{3}{2}(x'^2 + y'^2) \\
&\geq x'^3 + y'^3 + \frac{3}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 \\
&\geq x'^2\left(x' + \frac{3}{2}\right) + y'^2\left(y' + \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

La dernière quantité est positive pour  $x' > -\frac{3}{2}$  et  $y' > -\frac{3}{2}$  :  $(1, 1)$  est donc un point de minimum local.

19

Première problème de Cauchy :  $y(x) = \cos(wx)$ .

Deuxième problème de Cauchy :  $y(x) = \cosh(wx)$ .

La relation demandé est une relation de trigonométrie hyperbolique classique. En sommant  $\cosh(x+y)$  et  $\cosh(x-y)$  on montre que  $\cosh$  est solution de (\*). Il en va de même d'ailleurs pour  $\cos$ .

Soit  $f$  une solution de (\*). en prenant  $x = y = 0$  on a  $2f(0) = 2f'(0)^2$  et donc  $f(0) \in \{0, 1\}$ . Si  $f(0) = 0$  alors en prenant  $y = 0$  dans (\*) on a  $2f(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  donc  $f$  est la fonction nulle. Concentrons nous sur  $f(0) = 1$ . On dérive par rapport à  $y$  l'équation (\*) et on prend  $y = 0$  :  $f(x) - f(x) = 2f(x)f'(0)$  donc  $2f(x)f'(0) = 0$ . En particulier pour  $x = 0$  :  $2f'(0) = 0$  c'est-à-dire  $f'(0) = 0$ .

Soit donc  $f$  une solution  $\mathcal{C}^2$  de (\*). En dérivant par rapport à  $y$  deux fois, on a  $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$ . Puis en prenant  $y = 0$  :  $f''(x) = f(x)f''(0)$ . On se ramène aux cas des deux premières questions avec  $w^2 = \pm f''(0)$  en fonction du signe de  $f''(0)$ . On en déduit que les solutions sont de la forme  $x \mapsto \cos(wx)$  ou  $x \mapsto \cosh(wx)$ , dont on a vérifié avant qu'elles étaient effectivement solutions.

20

1. On trouve comme solution de l'équation homogène sur  $]0, +\infty[$  la droite vectorielle engendrée par  $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ . En effet, une primitive de  $x \mapsto \frac{3}{2x}$  sur  $]0, +\infty[$  est  $x \mapsto \frac{3}{2} \ln x$ .



2. On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une fonction  $k$  telle que  $x \mapsto k(x)x^{\frac{3}{2}}$  soit une solution de l'équation complète (E) sur  $]0, +\infty[$ . On arrive alors à  $2k'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}$  et on choisit  $k(x) = -\frac{1}{2x}$ . Les solutions de (E) sur  $]0, +\infty[$  sont donc les fonctions  $x \mapsto kx^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .
3. Si on cherche à prolonger les solutions de (E) sur  $[0, +\infty[$ , alors le prolongement par continuité ne pose pas de problème en posant  $f(0) = 0$ . Par contre, aucun prolongement ne sera dérivable en 0 car  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = k\sqrt{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$ . Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $2xy' - 3y = \sqrt{x}$  sur  $[0, +\infty[$  est l'ensemble vide.

21

Soit  $f(x) = x^\alpha$  une solution de  $(E_0)$ . Alors  $\alpha(\alpha-1)x^\alpha + 4\alpha x^\alpha + 2x^\alpha = (\alpha^2 + 3\alpha + 2)x^\alpha = 0$ . On en déduit que  $\alpha = -1$  ou  $\alpha = -2$ . On obtient alors deux solutions libres : c'est une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Cherchons maintenant une solution de (E)  $y$  sous la forme  $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$  c'est à dire  $z(x) = x^2 y(x)$ . On a alors  $z'(x) = 2xy(x) + x^2 y'(x)$  et  $z''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + x^2 y''(x)$ . L'équation (E) devient  $z''(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ . Une solution particulière est donc  $z(x) = -4\sqrt{x}$  et donc  $y(x) = \frac{-4}{x\sqrt{x}}$ .

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est  $y(x) = \frac{-4}{x\sqrt{x}} + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$ .

22

1.  $f$  est clairement linéaire.() De plus,  $\forall P \in E \setminus \{0\}$ ,  $\deg P' < \deg P$  donc  $\deg(P - P') = \deg P$ . Et, si  $P = 0$ , alors  $P - P' = 0$  donc  $\deg(P - P') = \deg P = -\infty$ . On en déduit que  $\forall P \in E$ ,  $\deg f(P) = \deg P$ . Donc  $f(E) \subset E$ .() D'après () et (),  $f$  est bien un endomorphisme de  $E$ .
- a. Déterminons  $\text{Ker} f$ . Soit  $P \in \text{Ker} f$ .  $f(P) = 0$  donc  $P - P' = 0$  donc  $\deg(P - P') = -\infty$ . Or, d'après ce qui précède,  $\deg(P - P') = \deg P$  donc  $\deg P = -\infty$ . Donc  $P = 0$ . On en déduit que  $\text{Ker} f = \{0\}$ . Donc  $f$  est injectif. Or,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $E$  est de dimension finie ( $\dim E = n + 1$ ) donc  $f$  est bijectif.
- b. Soit  $e = (1, X, \dots, X^n)$  la base canonique de  $E$ . Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans la base  $e$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

$\det A = 1$  d'où  $\det A \neq 0$ . Donc  $f$  est bijectif.

2. Soit  $Q \in E$ . D'après 1. :  $\exists ! P \in E$ , tel que  $f(P) = Q$ .  $P - P' = Q$ ,  $P' - P'' = Q'$ , ...,  $P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$ . Or  $P^{(n+1)} = 0$ , donc, en sommant ces  $n + 1$  égalités,  $P = Q + Q' + \dots + Q^{(n)}$ .
3. Reprenons les notations de 1.(b). Tout revient à se demander si  $A$  est diagonalisable. Notons  $P_A(X)$  le polynôme caractéristique de  $A$ . D'après 1.(b), on a  $P_A(X) = (X - 1)^{n+1}$ . Donc 1 est l'unique valeur propre de  $A$ . Ainsi, si  $A$  était diagonalisable, alors  $A$  serait semblable à la matrice unité  $I_{n+1}$ . On aurait donc  $A = I_{n+1}$ . Ce qui est manifestement faux car  $f \neq \text{Id}$ . Donc  $A$  n'est pas diagonalisable et par conséquent,  $f$  n'est pas diagonalisable.

23

1. Posons  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On a  $f(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$ . Alors  $M \in \text{Ker} f \iff \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $\begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$ . C'est-à-dire,  $M \in \text{Ker} f \iff \exists (c, d) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$ . On en déduit que  $\text{Ker} f = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ .() On pose  $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . D'après (), la famille  $(M_1, M_2)$  est génératrice de  $\text{Ker} f$ . De plus,  $M_1$  et  $M_2$  sont non colinéaires ; donc  $(M_1, M_2)$  est libre. Donc  $(M_1, M_2)$  est une base de  $\text{Ker} f$ .
2.  $\text{Ker} f \neq \{0\}$ , donc  $f$  est non injectif. Or  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est de dimension finie. On en déduit que  $f$  est non surjectif.
3. Par la formule du rang,  $\text{rg} f = 2$ . On pose  $M_3 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M_4 = f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .  $M_3$  et  $M_4$  sont non colinéaires, donc  $(M_3, M_4)$  est une famille libre de  $\text{Im} f$ . Comme  $\text{rg} f = 2$ ,  $(M_3, M_4)$  est une base de  $\text{Im} f$ .

4. On a  $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$ . (1) Prouvons que  $\text{Ker} f \cap \text{Im} f = \{0\}$ . Soit  $M \in \text{Ker} f \cap \text{Im} f$ . D'après 1. et 3.,  $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $M = aM_1 + bM_2$  et  $M = cM_3 + dM_4$ . On a donc

$$\begin{cases} -2a &= c \\ -2b &= 2d \\ a &= 2c \\ b &= 4d \end{cases}$$

On en déduit que  $a = b = c = d = 0$ . Donc  $M = 0$ . Donc  $\text{Ker} f \cap \text{Im} f = \{0\}$  (2) Donc, d'après (1) et (2),  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$ .

24

- Supposons  $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$ . Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que  $\text{Im} f^2 \subset \text{Im} f$  () Montrons que  $\text{Im} f \subset \text{Im} f^2$ . Soit  $y \in \text{Im} f$ . Alors,  $\exists x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . Or  $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$ , donc  $\exists (a, b) \in E \times \text{Ker} f$  tel que  $x = f(a) + b$ . On a alors  $y = f^2(a) \in \text{Im} f^2$ . Ainsi  $\text{Im} f \subset \text{Im} f^2$  () D'après () et (),  $\text{Im} f = \text{Im} f^2$ .
- On a  $\text{Im} f^2 \subset \text{Im} f$  et  $\text{Ker} f \subset \text{Ker} f^2$ . On en déduit que  $\text{Im} f^2 = \text{Im} f \iff \text{rg} f^2 = \text{rg} f$  et  $\text{Ker} f = \text{Ker} f^2 \iff \dim \text{Ker} f = \dim \text{Ker} f^2$ . Alors, en utilisant le théorème du rang,  $\text{Im} f = \text{Im} f^2 \iff \text{rg} f = \text{rg} f^2 \iff \dim \text{Ker} f = \dim \text{Ker} f^2 \iff \text{Ker} f = \text{Ker} f^2$ .
  - Supposons  $\text{Im} f = \text{Im} f^2$ . Soit  $x \in \text{Im} f \cap \text{Ker} f$ .  $\exists a \in E$  tel que  $x = f(a)$  et  $f(x) = 0_E$ . On en déduit que  $f^2(a) = 0_E$  c'est-à-dire  $a \in \text{Ker} f^2$ . Or, d'après l'hypothèse et 2.(a),  $\text{Ker} f^2 = \text{Ker} f$  donc  $a \in \text{Ker} f$  c'est-à-dire  $f(a) = 0_E$ . C'est-à-dire  $x = 0$ . Ainsi  $\text{Im} f \cap \text{Ker} f = \{0_E\}$ . () De plus, d'après le théorème du rang,  $\dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f = \dim E$ . ()  
Donc, d'après () et (),  $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$ .

25

- $D = \text{Vect}((1, 2, 3))$ .  $(1, 2, 3) \notin P$  car les coordonnées du vecteur  $(1, 2, 3)$  ne vérifient pas l'équation de  $P$ . Donc  $D \cap P = \{0\}$ . () De plus,  $\dim D + \dim P = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3$ . () D'après () et (),  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ .
- Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Par définition d'une projection,  $p(u) \in P$  et  $u - p(u) \in D$ .  $u - p(u) \in D$  signifie que  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $u - p(u) = \alpha(1, 2, 3)$ . On en déduit que  $p(u) = (x - \alpha, y - 2\alpha, z - 3\alpha)$ . () Or  $p(u) \in P$  donc  $(x - \alpha) + (y - 2\alpha) + (z - 3\alpha) = 0$ , c'est-à-dire  $\alpha = \frac{1}{6}(x + y + z)$ . Et donc, d'après (),  $p(u) = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z)$ . Soit  $e = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $A$  la matrice de  $p$  dans la base  $e$ . On a

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- On pose  $e'_1 = (1, 2, 3)$ ,  $e'_2 = (1, -1, 0)$  et  $e'_3 = (0, 1, -1)$ .  $e'_1$  est une base de  $D$  et  $(e'_2, e'_3)$  est une base de  $P$ . Or  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$  donc  $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . De plus  $e'_1 \in D$  donc  $p(e'_1) = 0$ .  $e'_2 \in P$  et  $e'_3 \in P$  donc  $p(e'_2) = e'_2$  et  $p(e'_3) = e'_3$ . Ainsi,

$$M(p, e') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

26

- Par linéarité de l'évaluation  $P \mapsto P(a)$  (où  $a$  est un scalaire fixé),  $\Phi$  est linéaire.  
Soit  $P \in \mathbb{K}_2[X]$  tel que  $\Phi(P) = 0$ . Alors  $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$ , donc  $P$  admet trois racines distinctes. Or  $P$  est de degré inférieur ou égal à 2; donc  $P$  est nul. Ainsi,  $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$  i.e.  $\Phi$  est injective.  
Enfin,  $\dim(\mathbb{K}_2[X]) = \dim(\mathbb{K}^3) = 3$  donc  $\Phi$  est bijective.  
Par conséquent,  $\Phi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\mathbb{K}_2[X]$  dans  $\mathbb{K}^3$ .
- $\Phi$  est un isomorphisme donc l'image réciproque d'une base est une base.  
Ainsi,  $(L_1, L_2, L_3)$  est une base de  $\mathbb{K}_2[X]$ .
  - $L_1 \in \mathbb{R}_2[X]$  et vérifie  $\Phi(L_1) = (1, 0, 0)$  i.e.  $(L_1(a_1), L_1(a_2), L_1(a_3)) = (1, 0, 0)$ .  
Donc, comme  $a_2$  et  $a_3$  sont distincts,  $(X - a_2)(X - a_3) \mid L_1$ . Or  $\deg L_1 \leq 2$ , donc  $\exists k \in \mathbb{K}$  tel que  $L_1 = k(X - a_2)(X - a_3)$ .  
La valeur  $L_1(a_1) = 1$  donne  $k = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$ . Donc  $L_1 = \frac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$ .  
Un raisonnement analogue donne  $L_2 = \frac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}$  et  $L_3 = \frac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$ .

3.  $(L_1, L_2, L_3)$  base de  $\mathbb{K}_2[X]$  donc  $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$  tel que  $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$ . Par construction,  $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ ,  $L_i(a_j) = \delta_{ij}$  donc  $P(a_j) = \lambda_j$ . Ainsi,  $P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$ .
4. On pose  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$  et  $a_3 = 2$ . Ces trois réels sont bien distincts. On cherche  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que  $(P(a_1), P(a_2), P(a_3)) = (1, 3, 1)$ .
- Par bijectivité de  $\Phi$  et d'après 3., l'unique solution est le polynôme  $P = 1.L_1 + 3.L_2 + 1.L_3$ . On a  $L_1 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}$ ,  $L_2 = \frac{X(X-2)}{-1}$  et  $L_3 = \frac{X(X-1)}{2}$ . Donc  $P = -2X^2 + 4X + 1$ .

27

On a  $\dim(P) + \dim(D) = 3$ . Soit  $u \in D \cap P$ .  $u \in D$ , donc  $u = (2\lambda, 2\lambda, 1)$ .  $u \in P$  donc  $2\lambda - 4\lambda + 3\lambda = 0$  càd  $\lambda = 0$ . Ainsi les deux espaces sont bien supplémentaires.

Les deux vecteurs  $u = (2, 1, 0)$  et  $v = (3, 0, -1)$  forment une base de  $P$ , et le vecteur  $w = (2, 2, 1)$  forme une base de  $D$ .

Notons  $p$  le projecteur et  $s$  la symétrie. La matrice de  $p$  dans la base  $(u, v, w)$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et la matrice de  $s$  est

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . La matrice de passage de la base canonique vers cette base est  $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Pour avoir la matrice de  $p$

dans la base canonique on fait  $PAP^{-1}$ . On laisse les calculs à la bonne volonté du lecteur.

28 Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Supposons que  $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$ . On sait déjà que  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ . Soit  $y \in \text{Im}(f)$ , posons  $y = f(x_0)$  et  $x_0 = x_K + x_I$  avec  $x_K \in \text{Ker}(f)$  et  $x_I \in \text{Im}(f)$ . Posons alors  $x_I = f(z)$ . On a :  $y = f(x_K + x_I) = f(x_K) + f(x_I) = 0 + f(f(z)) \in \text{Im}(f^2)$ . Donc  $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$  et ainsi  $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ .

Réciproquement, si  $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$ , on sait que  $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \subset E$ . C'est l'inclusion réciproque qui nous intéresse. Soit  $x \in E$ , on a  $f(x) \in \text{Im}(f)$  et donc  $f(x) \in \text{Im}(f^2)$ . On en déduit qu'il existe  $z \in E$  tel que  $f(x) = f^2(z)$ . Posons  $y = x - f(z)$ , alors  $f(y) = f(x) - f^2(z) = 0$ . Donc  $y \in \text{Ker } f$ . On en déduit  $x = y + f(z) \in \text{Ker } f + \text{Im } f$  et donc  $E = \text{Ker } f + \text{Im } f$ .

29

1. a. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté  $(|)$ . On pose  $\forall x \in E$ ,  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ . Inégalité de Cauchy-Schwarz :  $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$  Preuve : Soit  $(x, y) \in E^2$ . Posons  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $P(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2$ . On remarque que  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $P(\lambda) \geq 0$ . De plus,  $P(\lambda) = (x + \lambda y | x + \lambda y)$ . Donc, par bilinéarité et symétrie de  $(|)$ ,  $P(\lambda) = \|y\|^2 \lambda^2 + 2\lambda (x|y) + \|x\|^2$ . On remarque que  $P(\lambda)$  est un trinôme en  $\lambda$  si et seulement si  $\|y\|^2 \neq 0$ .
- Premier cas : si  $y = 0$  Alors  $|(x|y)| = 0$  et  $\|x\| \|y\| = 0$  donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.
- Deuxième cas :  $y \neq 0$  Alors  $\|y\| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$  car  $y \neq 0$  et  $(|)$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Donc,  $P$  est un trinôme du second degré en  $\lambda$  qui est positif ou nul. On en déduit que le discriminant réduit  $\Delta$  est négatif ou nul. Or  $\Delta = (x|y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$  donc  $(x|y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ . Et donc,  $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ .
- b. On reprend les notations de 1.. Prouvons que  $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $|(x|y)| = \|x\| \|y\| \iff x$  et  $y$  sont colinéaires. Supposons que  $|(x|y)| = \|x\| \|y\|$ .
- Premier cas : si  $y = 0$  Alors  $x$  et  $y$  sont colinéaires.
- Deuxième cas : si  $y \neq 0$  Alors le discriminant de  $P$  est nul et donc  $P$  admet une racine double  $\lambda_0$ . C'est-à-dire  $P(\lambda_0) = 0$  et comme  $(|)$  est définie positive, alors  $x + \lambda_0 y = 0$ . Donc  $x$  et  $y$  sont colinéaires.
- Supposons que  $x$  et  $y$  soient colinéaires. Alors  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $x = \alpha y$  ou  $y = \alpha x$ . Supposons par exemple que  $x = \alpha y$  (raisonnement similaire pour l'autre cas).  $|(x|y)| = |\alpha| |(y|y)| = |\alpha| \|y\|^2$  et  $\|x\| \|y\| = \sqrt{(\alpha y | \alpha y)} \|y\| = \sqrt{\alpha^2 (y|y)} \|y\| = |\alpha| \|y\|^2$ . Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  défini par :  $\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ,  $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ .

On pose  $A = \left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}$ .  $A \subset \mathbb{R}$ .  $A \neq \emptyset$  car  $(b-a)^2 \in A$  (valeur obtenue pour la fonction  $t \mapsto 1$  de  $E$ ). De plus,  $\forall f \in E$ ,  $\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq 0$  donc  $A$  est minorée par 0. On en déduit que  $A$  admet

une borne inférieure et on pose  $m = \inf A$ . Soit  $f \in E$ . On considère la quantité  $\left( \int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2$ . D'une part,

$\left( \int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 = \left( \int_a^b 1 dt \right)^2 = (b-a)^2$ . D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit

scalaire  $(|)$  on obtient :  $\left( \int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt$ . On en déduit que  $\forall f \in E$ ,  $\int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq (b-a)^2$ . Donc  $m \geq (b-a)^2$ . Et, si on considère la fonction  $f : t \mapsto 1$  de  $E$ , alors  $\int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt = (b-a)^2$ . Donc  $m = (b-a)^2$ .

30

1. On a

$$A \subset (A^\perp)^\perp \quad (*)$$

En effet,  $\forall x \in A, \forall y \in A^\perp, (x | y) = 0$ . C'est-à-dire,  $\forall x \in A, x \in (A^\perp)^\perp$ . Comme  $E$  est un espace euclidien,  $E = A \oplus A^\perp$  donc  $\dim A = n - \dim A^\perp$ . De même,  $E = A^\perp \oplus (A^\perp)^\perp$  donc  $\dim (A^\perp)^\perp = n - \dim A^\perp$ . Donc

$$\dim (A^\perp)^\perp = \dim A. \quad (**)$$

D'après  $(*)$  et  $(**)$ ,  $(A^\perp)^\perp = A$ .

2. a. Procédons par double inclusion. Prouvons que  $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$ . Soit  $x \in F^\perp \cap G^\perp$ . Soit  $y \in F+G$ . Alors  $\exists (f, g) \in F \times G$  tel que  $y = f + g$ .  $(x | y) = \underbrace{(x | f)}_{=0} + \underbrace{(x | g)}_{=0} = 0$ . Donc  $\forall y \in (F+G), (x | y) = 0$ . Donc  $x \in (F+G)^\perp$ . Prouvons que  $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$ . Soit  $x \in (F+G)^\perp$ .  $\forall y \in F$ , on a  $(x | y) = 0$  car  $y \in F \subset F+G$ . Donc  $x \in F^\perp$ . De même,  $\forall z \in G$ , on a  $(x | z) = 0$  car  $z \in G \subset F+G$ . Donc  $x \in G^\perp$ . On en déduit que  $x \in F^\perp \cap G^\perp$ . Finalement, par double inclusion,  $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .
- b. D'après 2.(a), appliquée à  $F^\perp$  et à  $G^\perp$ , on a  $(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp$ . Donc, d'après 1.,  $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$ . Donc  $((F^\perp + G^\perp)^\perp)^\perp = (F \cap G)^\perp$ . C'est-à-dire, en utilisant 1. à nouveau,  $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$ .

31

1. Soit  $h$  une fonction continue et positive de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\int_a^b h(x) dx = 0$ . On pose  $\forall x \in [a, b], F(x) = \int_a^x h(t) dt$ .  $h$  est continue sur  $[a, b]$  donc  $F$  est dérivable sur  $[a, b]$ . De plus,  $\forall x \in [a, b], F'(x) = h(x)$ . Or  $h$  est positive sur  $[a, b]$  donc  $F$  est croissante sur  $[a, b]$ . Or  $F(a) = 0$  et, par hypothèse,  $F(b) = 0$ . C'est-à-dire  $F(a) = F(b)$ . D'après  $( )$  et  $( )$ ,  $F$  est constante sur  $[a, b]$ . Donc  $\forall x \in [a, b], F'(x) = 0$ . C'est-à-dire,  $\forall x \in [a, b], h(x) = 0$ .
2. On pose  $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$ . Par linéarité de l'intégrale,  $(|)$  est linéaire par rapport à sa première variable. Par commutativité du produit sur  $\mathbb{R}$ ,  $(|)$  est symétrique. On en déduit que  $(|)$  est une forme bilinéaire symétrique. Soit  $f \in E$ .  $(f|f) = \int_a^b f^2(x) dx$ . Or  $x \mapsto f^2(x)$  est positive sur  $[a, b]$  et  $a < b$  donc  $(f|f) \geq 0$ . Donc  $(|)$  est positive. Soit  $f \in E$  telle que  $(f|f) = 0$ . Alors  $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ . Or  $x \mapsto f^2(x)$  est positive et continue sur  $[a, b]$ . Donc, d'après 1.,  $f$  est nulle sur  $[a, b]$ . Donc  $(|)$  est définie. D'après  $( )$ ,  $( )$  et  $( )$ ,  $(|)$  est un produit scalaire sur  $E$ .
3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne  $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx \leq \sqrt{\int_0^1 x dx} \sqrt{\int_0^1 e^{-2x} dx} = \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{2}$ .

32

1. On pose  $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ . Par linéarité de l'intégrale,  $(|)$  est linéaire par rapport à sa première variable. Par commutativité du produit sur  $\mathbb{R}$ ,  $(|)$  est symétrique. On en déduit que  $(|)$  est une forme bilinéaire symétrique. Soit  $f \in E$ .  $(f|f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt$ . Or  $t \mapsto f^2(t)$  est positive sur  $[0, 2\pi]$  et  $0 < 2\pi$ , donc  $(f|f) \geq 0$ . Donc  $(|)$  est positive. Soit  $f \in E$  telle que  $(f|f) = 0$ . Alors  $\int_0^{2\pi} f^2(t) dt = 0$ . Or  $t \mapsto f^2(t)$  est positive et continue sur  $[0, 2\pi]$ . Donc,  $f$  est nulle sur  $[0, 2\pi]$ . Or  $f$  est  $2\pi$ -périodique donc  $f = 0$ . Donc  $(|)$  est définie. D'après  $( )$ ,  $( )$  et  $( )$ ,  $(|)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

2. On a  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$ .  $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(2x) \in F$ . De plus, si on note  $h$  l'application  $x \mapsto \frac{1}{2}$ ,  $(h|f) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$  et  $(h|g) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2x) dx = 0$  donc  $h \in F^\perp$  (car  $F = \text{Vect}(f, g)$ ). On en déduit que le projeté orthogonal de  $u$  sur  $F$  est  $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(2x)$ .

33

1. On a immédiatement  $\mathcal{F} = \text{Vect}(l_2, K)$  avec  $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . On peut donc affirmer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  
 $\mathcal{F} = \text{Vect}(l_2, K)$  donc  $(l_2, K)$  est une famille génératrice de  $\mathcal{F}$ . De plus,  $l_2$  et  $K$  sont non colinéaires donc la famille  $(l_2, K)$  est libre. On en déduit que  $(l_2, K)$  est une base de  $\mathcal{F}$ .
2. Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Comme  $(l_2, K)$  est une base de  $\mathcal{F}$ ,  $M \in \mathcal{F}^\perp \iff \varphi(M, l_2) = 0$  et  $\varphi(M, K) = 0$ . C'est-à-dire,  $M \in \mathcal{F}^\perp \iff a + d = 0$  et  $b - c = 0$ . Ou encore,  $M \in \mathcal{F}^\perp \iff d = -a$  et  $c = b$ . On en déduit que  $\mathcal{F}^\perp = \text{Vect}(A, B)$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .  $(A, B)$  est une famille libre et génératrice de  $\mathcal{F}^\perp$  donc  $(A, B)$  est une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .
3. On peut écrire  $J = l_2 + B$  avec  $l_2 \in \mathcal{F}$  et  $B \in \mathcal{F}^\perp$ . Donc le projeté orthogonal de  $J$  sur  $\mathcal{F}^\perp$  est  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
4. On note  $d(J, \mathcal{F})$  la distance de  $J$  à  $\mathcal{F}$ . D'après le cours,  $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\|$  où  $p_{\mathcal{F}}(J)$  désigne le projeté orthogonal de  $J$  sur  $\mathcal{F}$ . On peut écrire à nouveau que  $J = l_2 + B$  avec  $l_2 \in \mathcal{F}$  et  $B \in \mathcal{F}^\perp$ . Donc  $p_{\mathcal{F}}(J) = l_2$ . On en déduit que  $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\| = \|J - l_2\| = \|B\| = \sqrt{2}$ .

34

1. On pose  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$ , on pose  $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$ . Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ ,  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$ ,  $B = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \in E$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- $$(A + A'|B) = \left( \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = (a + a')a'' + (b + b')b'' + (c + c')c'' + (d + d')d''.$$

Donc

$$(A + A'|B) = (aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + (a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') = (A|B) + (A'|B).$$

$$(\alpha A|B) = \left( \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = \alpha aa'' + \alpha bb'' + \alpha cc'' + \alpha dd'' = \alpha (A|B).$$

On en déduit que  $(. | .)$  est linéaire par rapport à sa première variable. De plus, par commutativité du produit sur  $\mathbb{R}$ ,  $(. | .)$  est symétrique. Donc  $(. | .)$  est une forme bilinéaire et symétrique.() Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ .  $(A|A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$ .

Donc  $(. | .)$  est positive.() Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$  telle que  $(A|A) = 0$ . Alors  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ . Comme il s'agit d'une somme de termes tous positifs, on en déduit que  $a = b = c = d = 0$  donc  $A = 0$ . Donc  $(. | .)$  est définie, et  $(. | .)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

2.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . On a  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in F$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in F^\perp$  car

$$\forall (a, b, d) \in \mathbb{R}^3, \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = 0.$$

On en déduit que le projeté orthogonal, noté  $p_F(A)$ , de  $A$  sur  $F$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Ainsi,

$$d(A, F) = \|A - p_F(A)\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1.$$

35

1.  $\langle , \rangle$  est linéaire par rapport à sa première variable par linéarité de la trace, de la transposition et par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans  $E$ . De plus, une matrice et sa transposée ayant la même trace, on a :  $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(^tAB) = \text{tr}(^t(^tAB)) = \text{tr}(^tBA) = \langle B, A \rangle$ . Donc  $\langle , \rangle$  est symétrique. On en déduit que  $\langle , \rangle$  est bilinéaire et symétrique. (1) Soit  $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in E$ .  $\langle A, A \rangle = \text{tr}(^tAA) = \sum_{i=1}^n (^tAA)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (^tA)_{i,k} A_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i}^2$  donc  $\langle A, A \rangle \geq 0$ .

Donc  $\langle , \rangle$  est positive. (2) Soit  $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in E$  telle que  $\langle A, A \rangle = 0$ . Alors  $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i}^2 = 0$ . Or,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{k,i}^2 \geq 0$ . Donc  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{k,i} = 0$ . Donc  $A = 0$ . Donc  $\langle , \rangle$  est définie. (3) D'après (1), (2) et (3),  $\langle , \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .

*Remarque importante :* Soit  $(A, B) \in E^2$ . On pose  $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $B = (B_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Alors  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(^tAB) = \sum_{i=1}^n (^tAB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (^tA)_{i,k} B_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i} B_{k,i}$ . Donc  $\langle , \rangle$  est le produit scalaire canonique sur  $E$ .

2. a. Soit  $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$ . alors  $^tM = M$  et  $^tM = -M$  donc  $M = -M$  et  $M = 0$ . Donc  $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ . (1) Soit  $M \in E$ . Posons  $S = \frac{M+^tM}{2}$  et  $A = \frac{M-^tM}{2}$ . On a  $M = S + A$ .  $^tS = ^t\left(\frac{M+^tM}{2}\right) = \frac{1}{2} (^tM + ^t(^tM)) = \frac{1}{2} (^tM + M) = S$ , donc  $S \in S_n(\mathbb{R})$ .  $^tA = ^t\left(\frac{M-^tM}{2}\right) = \frac{1}{2} (^tM - ^t(^tM)) = \frac{1}{2} (^tM - M) = -A$ , donc  $A \in A_n(\mathbb{R})$ . On en déduit que  $E = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$ . (2) D'après (1) et (2),  $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ .

*Remarque :* on pouvait également procéder par analyse et synthèse pour prouver que  $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ .

- b. Prouvons que  $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$ . Soit  $S \in S_n(\mathbb{R})$ . Prouvons que  $\forall A \in A_n(\mathbb{R}), \langle S, A \rangle = 0$ . Soit  $A \in A_n(\mathbb{R})$ .  $\langle S, A \rangle = \text{tr}(^tSA) = \text{tr}(SA) = \text{tr}(AS) = \text{tr}(-^tAS) = -\text{tr}(^tAS) = -\langle A, S \rangle = -\langle S, A \rangle$ . Donc  $2\langle S, A \rangle = 0$  soit  $\langle S, A \rangle = 0$ . On en déduit que  $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$  (1) De plus,  $\dim A_n(\mathbb{R})^\perp = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$ . Or, d'après 2.(a),  $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$  donc  $\dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$ . On en déduit que  $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^\perp$ . (2) D'après (1) et (2),  $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^\perp$ .

- c. On introduit la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  en posant :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_{ij} = (e_{k,l})_{1 \leq k, l \leq n}$  avec  $e_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  On a alors  $F = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n})$ . Soit  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in E$ . Alors, en utilisant la remarque importante de la question 1.,  $M \in F^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle M, E_{i,i} \rangle = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,i} = 0$ . Donc  $F^\perp = \text{Vect}(E_{i,j} \text{ telles que } (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \text{ et } i \neq j)$ . En d'autres termes,  $F^\perp$  est l'ensemble des matrices comprenant des zéros sur la diagonale.

36

D'après le cours,  $p(x) = \langle x | u \rangle u$ .

Un vecteur orthogonal à ce plan est  $(1, -2, 1)$  de norme  $\sqrt{6}$  : on pose  $u = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ . Notons  $p$  la projection orthogonale sur  $u$ . Alors  $q = \text{id} - p$ . Or :  $p(e_1) = \langle e_1 | u \rangle u = \frac{1}{\sqrt{6}}u$ ,  $p(e_2) = \langle e_2 | u \rangle u = -\frac{2}{\sqrt{6}}u$  et  $p(e_3) = \langle e_3 | u \rangle u = \frac{1}{\sqrt{6}}u$ . On a donc

$$\text{mat}(p) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ On en déduit } \text{mat}(q) = I_3 - \text{mat}(p) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

37

Posons  $\varphi(x) = x + \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle u_i$ .  $\varphi$  est évidemment une application linéaire de  $E$  dans  $E$ . On remarque que pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\varphi(e_k) = e_k + u_k$ . Ainsi la famille des  $e_k + u_k$  est une base si et seulement si  $\varphi$  est injective.

Soit  $x \in \ker \varphi$ . On a alors  $x = -\sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle u_i$ . On a alors :

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |\langle x | e_i \rangle| \|u_i\| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\langle x | e_i \rangle| \times 1 \leq \frac{1}{n} \|x\| \sqrt{n} \leq \frac{\|x\|}{\sqrt{n}}$$

Or  $n > 1$  a priori donc  $\|x\| = 0$ . On en déduit que  $\varphi$  est injective, c'est un endomorphisme donc un automorphisme : l'image d'une base est une base, donc  $(e_1 + u_1, \dots, e_n + u_n)$  est une base.

38

la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  est décroissante. On a donc de façon assez classique  $\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ . En sommant de  $n+1$  à  $2n$ , on obtient :

$$\int_{n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_n^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Or

$$\int_{n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{2n} - \sqrt{n+1}) = 2\sqrt{n}(\sqrt{2} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}) \sim 2\sqrt{n}(\sqrt{2} - 1)$$

et

$$\int_n^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{2n-1} - \sqrt{n}) = 2\sqrt{n}(\sqrt{2 - \frac{1}{n}} - 1) \sim 2\sqrt{n}(\sqrt{2} - 1).$$

Par conservation de l'équivalent par encadrement,  $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}(\sqrt{2} - 1)$ .  
par les sommes de Riemann, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} = \sqrt{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}$$

Or par somme de Riemann,  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2(\sqrt{2} - 1)$ . On en déduit que  $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}(\sqrt{2} - 1)$ .

39

Posons  $u = \tan(x)$ , on a  $du = (1 + u^2)dx$ . Appliquons ce changement de variable :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx \\ &= \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2} du \\ &= \left[ \frac{1}{n+1} \frac{u^{n+1}}{1+u^2} \right]_0^1 + \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+2}}{(1+u^2)^2} du \end{aligned}$$

On  $\int_0^1 \frac{u^{n+2}}{(1+u^2)^2} du \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2} du$  ce qui assure la convergence de tous les termes vers 0. Ainsi  $I_n$  converge vers 0.

On essaye d'obtenir une relation de récurrence sur  $I_n$  :

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n (1 + \tan^2(x)) dx = \left[ \frac{1}{n+1} (\tan x)^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$$

On doit maintenant utiliser la question précédente. On peut remarquer que  $\frac{1}{2n+1} = I_{2n} + I_{2n+2}$  et donc  $\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^N (-1)^n (I_{2n} + I_{2n+2}) = I_0 + I_2 - I_2 - I_4 + I_4 + I_6 - \dots + (-1)^N I_{2N} + (-1)^N I_{2N+2} = I_0 + (-1)^N I_{2N+2}$ . Par ailleurs  $I_{2N+2} \rightarrow 0$  donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = I_0 = \frac{\pi}{4}$ .

Enfin,  $I_n$  est positive, décroissante et converge vers 0. D'après le CSSA,  $\sum (-1)^n I_n$  converge. Or on remarque  $\sum (-1)^n I_n = I_0 - I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - \dots = (I_0 + I_2) + (I_4 + I_6) + \dots - (I_1 + I_3) - (I_5 + I_7) - \dots$  et donc  $2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = I_0 - I_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) + \ln(2) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2)$ . D'où  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln(2)$ .

40

1. Soit  $z$  un complexe non nul. Posons  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels. Un argument de  $z$  est un réel  $\theta$  tel que  $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$  avec  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

2.  $z = 0$  n'est pas solution de l'équation  $z^n = 1$ . Les complexes solutions s'écriront donc sous la forme  $z = re^{i\theta}$  avec  $r > 0$  et

$\theta \in \mathbb{R}$ . On a  $z^n = 1 \iff \begin{cases} r^n = 1 \\ \text{et} \\ n\theta = 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \text{et} \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$  Les réels  $\frac{2k\pi}{n}$ , pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , sont deux à deux

distincts et  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\frac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi[$ . Or  $\begin{matrix} [0, 2\pi[ & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{matrix}$  est injective. Donc,  $\left\{ e^{\frac{i2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$  est constitué de  $n$  solutions distinctes de l'équation  $z^n = 1$ . Les solutions de l'équation  $z^n = 1$  étant également racines du polynôme  $X^n - 1$ , il ne peut y en avoir d'autres. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation  $z^n = 1$  est  $S = \left\{ e^{\frac{i2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$ .



3.  $z = i$  n'étant pas solution de l'équation  $(z + i)^n = (z - i)^n$ ,

$$(z + i)^n = (z - i)^n \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ tel que } \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ tel que } z \left(1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right) = -i \left(1 + e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)$$

En remarquant que  $z \left(1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right) = -i \left(1 + e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)$  n'admet pas de solution pour  $k = 0$ , on en déduit que :

$$(z + i)^n = (z - i)^n \iff \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \text{ tel que } z = i \frac{e^{\frac{i2k\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{i2k\pi}{n}} - 1}$$

En écrivant

$$i \frac{e^{\frac{i2k\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{i2k\pi}{n}} - 1} = i \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}} = i \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)},$$

on voit que les solutions sont des réels. On pouvait aussi voir que si  $z$  est solution de l'équation  $(z + i)^n = (z - i)^n$  alors  $|z + i| = |z - i|$  et donc le point d'affixe  $z$  appartient à la médiatrice de  $[A, B]$ ,  $A$  et  $B$  étant les points d'affixes respectives  $i$  et  $-i$ , c'est-à-dire à la droite des réels.

41

$$1. z^k - 1 = e^{i \frac{k2\pi}{n}} - 1 = e^{i \frac{k\pi}{n}} \left( e^{i \frac{k\pi}{n}} - e^{-i \frac{k\pi}{n}} \right) = e^{i \frac{k\pi}{n}} 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ c'est-à-dire } z^k - 1 = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on a  $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$ , donc  $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$ . Donc le module de  $z^k - 1$  est  $2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$  et un argument de  $z^k - 1$  est  $\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$ .

$$2. \text{ On remarque que pour } k = 0, |z^k - 1| = 0 \text{ et } \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0. \text{ Donc d'après la question précédente, on a } S = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

$S$  est donc la partie imaginaire de  $T = 2 \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{k\pi}{n}}$ . Or, comme  $e^{i \frac{\pi}{n}} \neq 1$ , on a  $T = 2 \frac{1 - e^{i \frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i \frac{\pi}{n}}}$ . Or  $1 - e^{i \frac{\pi}{n}} = e^{i \frac{\pi}{2n}} (e^{-i \frac{\pi}{2n}} - e^{i \frac{\pi}{2n}}) = -2ie^{i \frac{\pi}{2n}} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ . On en déduit que  $T = \frac{4e^{-i \frac{\pi}{2n}}}{-2i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} i e^{-i \frac{\pi}{2n}}$ . En isolant la partie imaginaire de  $T$ , et comme  $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \neq 0$  ( $n \geq 2$ ), on en déduit que  $S = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ .

42

pour l'équation  $z^n = e^{i\pi/3}$  on doit se ramener à une équation de la forme  $Z^n = 1$ . On pose donc ici  $Z = \frac{z}{e^{i\pi/3n}}$  et on a donc  $Z \in \mathbb{U}_n$ . Les solutions sont donc  $Z = e^{2ik\pi/n}$  et  $z = e^{2ik\pi/n + i\pi/(3n)} = e^{i\pi \frac{1+6k}{3n}}$ .

Pour la seconde équation, on note que  $ze \neq 1$  et  $z \neq -1$ , on pose  $Z = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$  et l'équation est équivalente à  $Z^2 - Z + 1 = 0$  dont les racines sont  $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}$ . On en déduit que  $\frac{z-1}{z+1} = e^{i\pi \frac{1+6k}{3n}}$ .

$$\text{Or si } \frac{z-1}{z+1} = e^{i\theta}, \text{ alors } z = \frac{e^{i\theta} + 1}{1 - e^{i\theta}} = i \frac{2 \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{i}{\tan \frac{\theta}{2}}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, on a donc les solutions :  $\frac{i}{\tan \frac{\pm 1 + 6k}{6n} \pi}$  pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ .

43

La première question est triviale.

$$\text{On a } A_{n+1} + iB_{n+1} = (3 + 4i)(A_n + iB_n) = (3A_n - 4B_n) + i(3B_n + 4A_n).$$

On montre facilement par récurrence grâce à la relation précédente que  $A_n$  et  $B_n$  sont des entiers.

On montre les histoires de restes par récurrence aussi.

La dernière question est plus intéressante : le complexe  $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$  est dans  $\mathbb{U}$ . Montrons que pour tout entier  $n$ ,  $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n \neq 1$ .

On s'intéresse pour cela à la valeur de  $B_n$  :  $B_n$  est un entier dont le reste modulo 5 est 4 :  $B_n$  ne peut donc pas être nul. Or  $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n = \frac{A_n}{5^n} + i \frac{B_n}{5^n}$  donc  $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n \neq 1$ .

44

On passe en complexes en remplaçant  $\cos(kx)$  par  $e^{ikx}$ .



$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} &= (1 + e^{ix})^n \\ &= e^{i\frac{n}{2}x} (2 \cos(\frac{x}{2}))^n\end{aligned}$$

Et ainsi  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) = 2^n \cos(\frac{nx}{2}) \cos^n(\frac{x}{2})$ .

45

$$1. \quad a. \quad P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

b.

$a$  est une racine d'ordre  $r$  de  $P \iff$

$\exists Q \in \mathbb{R}_{n-r}[X]$  tel que  $Q(a) \neq 0$  et  $P = (X-a)^r Q$

$$\iff \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = (X-a)^r \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^i$$

$$\iff \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^{r+i}$$

$$\iff \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{k=r}^n q_{k-r} (X-a)^k$$

D'après la formule de Taylor (rappelée ci-dessus) et l'unicité de la décomposition de  $P$  dans la base

$$(1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$$

de  $\mathbb{R}_n[X]$  il vient enfin :

$$a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P \iff \forall k \in \{0, \dots, r-1\} \quad P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } P^{(r)}(a) \neq 0$$

2. D'après la question précédente,

$$1 \text{ est racine double de } P = X^5 + aX^2 + bX \iff P(1) = P'(1) = 0 \text{ et } P''(1) \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \\ 20 + 2a \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff a = -4 \text{ et } b = 3$$

On obtient  $X^5 - 4X^2 + 3X = X(X-1)^2(X^2 + 2X + 3)$  et c'est la factorisation cherchée car le discriminant de  $X^2 + 2X + 3$  est strictement négatif.

46

1. L'application

$$\begin{aligned}u : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))\end{aligned}$$

est linéaire. Montrons que  $\text{Ker } u = \{0\}$ .

Si  $P \in \text{Ker } u$ , alors  $P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$  et le polynôme  $P$ , de degré inférieur ou égal à  $n$ , admet  $n+1$  racines distinctes. Donc  $P = 0$ . Ainsi  $u$  est injective et comme  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $u$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Enfin les conditions recherchées sont équivalentes à :  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $u(P) = (b_0, \dots, b_n)$ .

La bijectivité de  $u$  dit que ce problème admet une unique solution  $P$  et on a  $P = u^{-1}((b_0, \dots, b_n))$ .

2. Pour ce choix de  $b_0, b_1, \dots, b_n$  le polynôme  $L_k$  vérifie les conditions :

$$\deg L_k \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Comme  $a_0, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$  sont  $n$  racines distinctes de  $L_k$  qui est de degré  $\leq n$ , il existe nécessairement  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que

$$L_k = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (X - a_i)$$

La condition supplémentaire  $L_k(a_k) = 1$  donne  $\lambda = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (a_k - a_i)}$  et finalement :

$$L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

3. Soit  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Les polynômes  $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k$  et  $X^p$  vérifient les mêmes conditions d'interpolation :

$$\deg P \leq n \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(a_i) = a_i^p$$

Par l'unicité vue en première question, on a  $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$ .

47

Les racines de  $P$  sont les  $w - 1$  avec  $w \in \mathbb{U}_n$ . Or  $e^{2ik\pi/n} - 1 = 2ie^{ik\pi/n} \sin(k\pi/n)$ .

Or  $P = (X + 1)^n - 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k - 1 = X \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} X^{k-1}$ . Les racines de second membre sont donc les  $2ie^{ik\pi/n} \sin(k\pi/n)$  pour  $k \in \{1 \dots n-1\}$  : le produit des racines se lit sur le coefficient de degré 0 avec un coefficient multiplicatif de  $(-1)^{n-1}$  :

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} n &= \prod_{k=1}^{n-1} 2ie^{ik\pi/n} \sin(k\pi/n) = (2i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n) e^{i \sum_{k=1}^{n-1} k\pi/n} = (2i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n) e^{in(n-1)\pi/2n} \\ &= (2i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n) e^{i(n-1)\pi/2} = (-2)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n) \end{aligned}$$

On en déduit :  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n) = \frac{n}{2^{n-1}}$ .

48

Tout d'abord on a évidemment les relations :  $(i) \Rightarrow (ii)$  et  $(i) \Rightarrow (iii)$  ainsi que  $(ii) \Rightarrow (iii)$ . Nous allons montrer que  $(ii) \Rightarrow (i)$  et que  $(iii) \Rightarrow (i)$ . Commençons par faire une remarque plutôt simple à démontrer : on a pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $H_k(p) \in \mathbb{Z}$  avec en particulier  $H_k(k) = 1$ . De plus,  $(1, H_1, \dots, H_n)$  étant une famille de  $n+1$  éléments échelonnés de  $\mathbb{Q}_n[X]$ , cette famille est une base de  $\mathbb{Q}_n[X]$ .

Supposons  $(ii)$  vraie, alors en écrivant  $P = q_0 H_0 + q_1 H_1 + \dots + q_n H_n$ , on obtient le système :

$$\begin{cases} P(0) &= q_0 \\ P(1) &= q_0 H_0(1) + q_1 H_1(1) \\ &\vdots \\ P(n) &= q_0 H_0(n) + q_1 H_1(n) + \dots + q_n H_n(n) \end{cases}$$

système qui nous permet d'assurer que les  $q_i$  sont des entiers.

Soit maintenant un entier  $q$  quelconque, alors  $P(i) = q_0 H_0(i) + q_1 H_1(i) + \dots + q_n H_n(i)$  qui est une somme d'entier et ainsi  $P(i) \in \mathbb{Z}$ . Ainsi  $(ii) \Rightarrow (i)$ .

Montrons maintenant que  $(iii) \Rightarrow (i)$ . Pour cela, posons  $Q(X) = P(X+m)$ . On a donc pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $Q(k) = P(m+k) \in \mathbb{Z}$ . Alors d'après le cas précédent, on peut en déduire que  $Q(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ . Soit alors  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $P(k) = Q(k-m)$ . Or  $k-m \in \mathbb{Z}$  donc  $Q(k-m) \in \mathbb{Z}$ . Ainsi  $P(k) \in \mathbb{Z}$  et on en déduit que  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ .

On a donc bien équivalence entre les trois propriétés.

49

1. Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé. Soit  $B$  un événement de probabilité non nulle et  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors,  $\forall i_0 \in I$ ,  $P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\sum_{i \in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}$ .

Preuve :  $P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{P(B)}$ . (1) Or  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'événements donc  $P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B)$ .

Donc  $P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i)P_{A_i}(B)$ . (2). (1) et (2) donnent le résultat souhaité.

2. a. On tire au hasard un dé parmi les 100 dés. Notons  $T$  l'événement : "le dé choisi est pipé". Notons  $A$  l'événement : "On obtient le chiffre 6 lors du lancer". On demande de calculer  $P_A(T)$ . Le système  $(T, \bar{T})$  est un système complet d'événements de probabilités non nulles. On a d'ailleurs,  $P(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$  et donc  $P(\bar{T}) = \frac{3}{4}$ . Alors, d'après la formule de Bayes, on a :

$$P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\bar{T}}(A)P(\bar{T})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

- b. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On choisit au hasard un dé parmi les 100 dés.  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $A_k$  l'événement "on obtient le chiffre 6 au  $k^{\text{ième}}$  lancer". On pose  $A = \bigcap_{k=1}^n A_k$ . On nous demande de calculer  $p_n = P_A(T)$ . Le système  $(T, \bar{T})$  est un système complet d'événements de probabilités non nulles. On a d'ailleurs,  $P(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$  et donc  $P(\bar{T}) = \frac{3}{4}$ . Alors d'après la formule de Bayes, on a :

$$p_n = P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\bar{T}}(A)P(\bar{T})}$$

$$\text{Donc } p_n = \frac{\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^n - 1}}.$$

- c.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^n - 1}}$  Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$ . Ce qui signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

50

1. Notons  $U_1$  l'événement le premier tirage se fait dans l'urne  $U_1$ . Notons  $U_2$  l'événement le premier tirage se fait dans l'urne  $U_2$ .  $(U_1, U_2)$  est un système complet d'événements. Donc d'après la formule des probabilités totales,

$$p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2).$$

Donc  $p_1 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}$  On a donc  $p_1 = \frac{17}{35}$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $(B_n, \bar{B}_n)$  est un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales,  $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\bar{B}_n}(B_{n+1})P(\bar{B}_n)$ . Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a  $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n)$ . Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$ .
3.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$ . Donc  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite arithmético-géométrique. On résout l'équation  $l = -\frac{6}{35}l + \frac{4}{7}$  et on trouve  $l = \frac{20}{41}$ . On considère alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = p_n - l$ .  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est géométrique de raison  $-\frac{6}{35}$ , donc,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$ . Or  $u_1 = p_1 - l = \frac{17}{35} - \frac{20}{41} = -\frac{3}{1435}$ . On en déduit que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n = u_n + l$ , c'est-à-dire  $p_n = -\frac{3}{1435} \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}$ .

51

1. On note  $F = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B\}$ . Soit  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On pose  $F_p = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B \text{ et } \text{card} B = p\}$ . Pour une partie  $B$  à  $p$  éléments donnée, le nombre de parties  $A$  de  $E$  telles que  $A \subset B$  est  $\text{card } \mathcal{P}(B) = 2^p$ . De plus, on a  $\binom{n}{p}$  possibilités pour choisir une partie  $B$  de  $E$  à  $p$  éléments. On en déduit que :  $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\text{card } F_p = \binom{n}{p} 2^p$ . Or  $F = \bigcup_{p=0}^n F_p$

avec  $F_0, F_1, \dots, F_n$  deux à deux disjoints. Donc  $a = \text{card } F = \sum_{p=0}^n \text{card } F_p = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p = 3^n$ , d'après le binôme de Newton.

Conclusion :  $a = 3^n$ . Autre méthode : Le raisonnement suivant (corrigé non détaillé) permet également de répondre à la question 1. Notons encore  $F = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B\}$ . À tout couple  $(A, B)$  de  $F$ , on peut associer l'application

$E \rightarrow \{1, 2, 3\}$   
 $\varphi_{A,B}$  définie par :  $\varphi_{A,B} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 2 & \text{si } x \notin A \text{ et } x \in B \\ 3 & \text{si } x \notin B \end{cases}$  On note  $\mathcal{A}(E, \{1, 2, 3\})$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $\{1, 2, 3\}$ . Alors l'application  $\Theta : \begin{matrix} F & \longrightarrow & \mathcal{A}(E, \{1, 2, 3\}) \\ (A, B) & \longmapsto & \varphi_{A,B} \end{matrix}$  est bijective. Le résultat en découle.

$$2. \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \cap B = \emptyset\} = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset \overline{B}\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \text{card} \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset \overline{B}\} &= \text{card} \{(A, \overline{B}) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset \overline{B}\} \\ &= \text{card} \{(A, C) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset C\} \\ &= a. \end{aligned}$$

Donc  $b = a$ .

3. Compter tous les triplets  $(A, B, C)$  tels que  $A, B$  et  $C$  soient deux à deux disjoints et tels que  $A \cup B \cup C = E$  revient à compter tous les couples  $(A, B)$  tels que  $A \cap B = \emptyset$  car, alors,  $C$  est obligatoirement égal à  $\overline{A \cup B}$ . En d'autres termes,  $c = \text{card} \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \cap B = \emptyset\} = b = 3^n$ .

52

1. a. L'expérience est la suivante : l'épreuve "le tirage d'une boule dans l'urne" est répétée 5 fois. Comme les tirages se font avec remise, ces 5 épreuves sont indépendantes. Chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le joueur tire une boule blanche (succès avec la probabilité  $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ) ou le joueur tire une boule noire (échec avec la probabilité  $\frac{4}{5}$ ). La variable  $X$  considérée représente donc le nombre de succès au cours de l'expérience et suit donc une loi binomiale de paramètre  $(5, \frac{1}{5})$ . C'est-à-dire  $X(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, P(X = k) = \binom{5}{k} (\frac{1}{5})^k (\frac{4}{5})^{5-k}$ . Donc, d'après le cours,  $E(X) = 5 \times \frac{1}{5} = 1$  et  $V(X) = 5 \times \frac{1}{5} \times (1 - \frac{1}{5}) = \frac{4}{5} = 0,8$ .
- b. D'après les hypothèses, on a  $Y = 2X - 3(5 - X)$ , c'est-à-dire  $Y = 5X - 15$ . On en déduit que  $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket\}$ . Et on a  $\forall k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, P(Y = 5k - 15) = P(X = k) = \binom{5}{k} (\frac{1}{5})^k (\frac{4}{5})^{5-k}$ .  $Y = 5X - 15$ , donc  $E(Y) = 5E(X) - 15 = 5 - 15 = -10$ . De même,  $Y = 5X - 15$ , donc  $V(Y) = 25V(X) = 25 \times \frac{4}{5} = 20$ .
2. Dans cette question, le joueur tire successivement, sans remise, 5 boules dans cette urne.
- a. Comme les tirages se font sans remise, on peut supposer que le joueur tire les 5 boules dans l'urne en une seule fois au lieu de les tirer successivement. Cette supposition ne change pas la loi de  $X$ .  $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ . Notons  $A$  l'ensemble dont les éléments sont les 10 boules initialement dans l'urne.  $\Omega$  est constitué de toutes les parties à 5 éléments de  $A$ . Donc  $\text{card } \Omega = \binom{10}{5}$ . Soit  $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ . L'événement  $(X = k)$  est réalisé lorsque le joueur tire  $k$  boules blanches et  $(5 - k)$  boules noires dans l'urne. Il a donc  $\binom{2}{k}$  possibilités pour le choix des boules blanches et  $\binom{8}{5-k}$  possibilités pour le choix des boules noires. Donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, P(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}.$$

- b. On a toujours  $Y = 5X - 15$ . On en déduit que  $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket\}$ . Et on a

$$\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, P(Y = 5k - 15) = P(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}.$$

53

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée  $n$  fois et ces  $n$  épreuves sont mutuellement indépendantes. De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité  $p$  (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité  $1 - p$  (échec). La variable  $X$  considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètres  $(n, p)$ . C'est-à-dire  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ .
2. a. Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Sous la condition  $(X = i)$ , la secrétaire rappelle  $n - i$  correspondants lors de la seconde série d'appels et donc :

$$P(Y = k | X = i) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, n-i \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- b.  $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$   $P(Z = k) = \sum_{i=0}^k P(X = i \cap Y = k - i) = \sum_{i=0}^k P(Y = k - i | X = i)P(X = i)$ . Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . D'après les questions précédentes,  $P(Z = k) = \sum_{i=0}^k \binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} p^k (1-p)^{2n-k-i}$ . Or, d'après l'indication,  $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}$ . Donc  $P(Z = k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i$ .  
Donc d'après le binôme de Newton,  $P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k = \binom{n}{k} (p(2-p))^k ((1-p)^2)^{n-k}$ . On vérifie que  $1-p(2-p) = (1-p)^2$  et donc on peut conclure que :  $Z$  suit une loi binomiale de paramètre  $(n, p(2-p))$ .
- c. D'après le cours, comme  $Z$  suit une loi binomiale de paramètre  $(n, p(2-p))$ , alors :  $E(Z) = np(2-p)$  et  $V(Z) = np(2-p)(1-p(2-p)) = np(2-p)(p-1)^2$ .

54

1. Soit  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ .  $X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(X_i = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$ . Alors on a  $P(X_i \leq n) = \sum_{k=1}^n P(X_i = k) = \sum_{k=1}^n pq^{k-1} = p \frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n$ . Donc  $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leq n) = q^n$ .
2. a.  $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $P(Y > n) = P((X_1 > n) \cap \dots \cap (X_N > n))$  Donc  $P(Y > n) = \prod_{i=1}^N P(X_i > n)$  car les variables  $X_1, \dots, X_N$  sont mutuellement indépendantes. Donc  $P(Y > n) = \prod_{i=1}^N q^n = q^{nN}$ . Or  $P(Y \leq n) = 1 - P(Y > n)$  donc  $P(Y \leq n) = 1 - q^{nN}$ . Calcul de  $P(Y = n)$  : Premier cas : si  $n \geq 2$ .  $P(Y = n) = P(Y \leq n) - P(Y \leq n-1)$ . Donc  $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$ . Deuxième cas : si  $n = 1$ .  $P(Y = n) = P(Y = 1) = 1 - P(Y > 1) = 1 - q^N$ . Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$ .
- b. D'après 2.(a),  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$ . C'est-à-dire  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(Y = n) = (1 - (1 - q^N))^{n-1} (1 - q^N)$ . On en déduit que  $Y$  suit une loi géométrique de paramètre  $1 - q^N$ . Donc, d'après le cours,  $Y$  admet une espérance et  $E(Y) = \frac{1}{1-q^N}$ .

55

1.  $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ .
2. a. Pour que l'événement  $(X = 2)$  se réalise, on a  $\binom{3}{2}$  possibilités pour choisir les 2 compartiments restant vides. Les deux compartiments restant vides étant choisis, chacune des  $n$  boules viendra se placer dans le troisième compartiment avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ . De plus les placements des différentes boules dans les trois compartiments sont indépendants. Donc  $P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ .
- b. Déterminons  $P(X = 1)$ . Pour que l'événement  $(X = 1)$  se réalise, on a  $\binom{3}{1}$  possibilités pour choisir le compartiment restant vide. Le compartiment restant vide étant choisi, on note  $A$  l'événement : "les  $n$  boules doivent se placer dans les deux compartiments restants (que nous appellerons compartiment  $a$  et compartiment  $b$ ) sans laisser l'un d'eux vide". Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . On note  $A_k$  l'événement : " $k$  boules se placent dans le compartiment  $a$  et les  $(n-k)$  boules restantes dans le compartiment  $b$ ". On a alors  $A = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ . On a  $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $P(A_k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .  
Donc  $P(X = 1) = \binom{3}{1} P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) = 3 \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k)$  car  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  sont deux à deux incompatibles. Donc  $P(X = 1) = 3 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 2\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2)$ . Donc  $P(X = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2)$ . Enfin,  $P(X = 0) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1)$  donc  $P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2)$ . Donc  $P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 1)$ .

*Autre méthode :* Une épreuve peut être assimilée à une application de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (ensemble des numéros des boules) dans  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$  (ensemble des numéros des cases). Notons  $\Omega$  l'ensemble de ces applications. On a donc :  $\text{card } \Omega = 3^n$ . Les

boules vont se "ranger aléatoirement dans les trois compartiments", donc il y a équiprobabilité sur  $\Omega$ . (a) L'événement  $(X = 2)$  correspond aux applications dont les images se concentrent sur le même élément de  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ , c'est-à-dire aux applications constantes. Donc  $P(X = 2) = \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}$ . (b) Comptons à présent le nombre d'applications correspondant à l'événement  $(X = 1)$ , c'est-à-dire le nombre d'applications dont l'ensemble des images est constitué de deux éléments exactement. On a 3 possibilités pour choisir l'élément de  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$  qui n'a pas d'antécédent et ensuite, chaque fois, il faut compter le nombre d'applications de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers les deux éléments restants de  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ , en excluant bien sûr les deux applications constantes. On obtient donc  $2^n - 2$  applications. D'où  $P(X = 1) = \frac{3 \times (2^n - 2)}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}} (2^n - 2)$ . Enfin, comme dans la méthode précédente,  $P(X = 0) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1)$  donc  $P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2)$ .

3. a.  $E(X) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2) + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ . Donc  $E(X) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .  
 b. D'après 3.(a),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ . Quand le nombre de boules tend vers  $+\infty$ , en moyenne aucun des trois compartiments ne restera vide.

56

1.  $X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ .  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $B_i$  la  $i^{\text{ème}}$  boule blanche.  $\forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ , on note  $N_i$  la  $i^{\text{ème}}$  boule noire. On pose  $E = \{B_1, B_2, \dots, B_n, N_1, N_2\}$ . Alors  $\Omega$  est l'ensemble des permutations de  $E$  et donc  $\text{card}(\Omega) = (n+2)!$ .

$(X = 1)$  correspond aux tirages des  $(n+2)$  boules pour lesquels la première boule tirée est blanche. On a donc  $n$  possibilités pour le choix de la première boule blanche et donc  $(n+1)!$  possibilités pour les tirages restants. Donc  $P(X = 1) = \frac{n \times (n+1)!}{(n+2)!} = \frac{n}{n+2}$ .  $(X = 2)$  correspond aux tirages des  $(n+2)$  boules pour lesquels la première boule tirée est noire et la seconde est blanche. On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis  $n$  possibilités pour la seconde boule et enfin  $n!$  possibilités pour les tirages restants. Donc  $P(X = 2) = \frac{2 \times n \times (n)!}{(n+2)!} = \frac{2n}{(n+1)(n+2)}$ .  $(X = 3)$  correspond aux tirages des  $(n+2)$  boules pour lesquels la première boule et la seconde boule sont noires. On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis une seule possibilité pour la seconde et enfin  $n!$  possibilités pour les boules restantes. Donc  $P(X = 3) = \frac{2 \times 1 \times (n)!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$ .

*Autre méthode* : Dans cette méthode, on ne s'intéresse qu'aux "premières" boules tirées, les autres étant sans importance.  $X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ .  $(X = 1)$  est l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage". Donc  $P(X = 1) = \frac{\text{nombre de boules blanches}}{\text{nombre de boules de l'urne}} = \frac{n}{n+2}$ .  $(X = 2)$  est l'événement : "obtenir une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au second tirage". D'où  $P(X = 2) = \frac{2}{n+2} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{(n+2)(n+1)}$ , les tirages se faisant sans remise.  $(X = 3)$  est l'événement : "obtenir une boule noire lors de chacun des deux premiers tirages puis une boule blanche au troisième tirage". D'où  $P(X = 3) = \frac{2}{n+2} \times \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$ , les tirages se faisant sans remise.

2.  $Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ . L'événement  $(Y = k)$  correspond aux tirages des  $(n+2)$  boules où les  $(k-1)$  premières boules tirées ne sont ni  $B_1$  ni  $N_1$  et la  $k^{\text{ème}}$  boule tirée est  $B_1$  ou  $N_1$ . On a donc, pour les  $(k-1)$  premières boules tirées,  $\binom{n}{k-1}$  choix possibles de ces boules et  $(k-1)!$  possibilités pour leur rang de tirage sur les  $(k-1)$  premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la  $k^{\text{ème}}$  boule et enfin  $(n+2-k)!$  possibilités pour les rangs de tirage des boules

restantes. Donc  $P(Y = k) = \frac{\binom{n}{k-1} \times (k-1)! \times 2 \times (n+2-k)!}{(n+2)!} = \frac{2 \times \frac{n!}{(n-k+1)!} \times (n+2-k)!}{(n+2)!}$ . Donc  $P(Y = k) = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$ .

*Autre méthode* :  $Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ . On note  $A_k$  l'événement "une boule ne portant pas le numéro 1 est tirée au rang  $k$ ". Soit  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ . On a :  $(Y = k) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap \bar{A}_k$ . Alors, d'après la formule des probabilités composées,  $P(Y = k) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-2})P(A_{k-1})P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1} | \bar{A}_k)$ .  $P(Y = k) = \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{(n+2)-1} \times \frac{n-2}{(n+2)-2} \times \dots \times \frac{n-(k-2)}{(n+2)-(k-2)} \times \frac{2}{(n+2)-(k-1)}$ .  $P(Y = k) = \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{n-k+2}{n-k+4} \times \frac{2}{n-k+3}$ .  $P(Y = k) = 2 \frac{n!}{(n-k+1)!} \times \frac{(n-k+2)!}{(n+2)!}$ .  $P(Y = k) = \frac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}$ .

57

On a :

$$P(X = i) = \sum_{j=1}^{n+1} P(X = i \cap Y = j) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{n}{i-1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{n}{i-1} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{n}{i-1} 2^n = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}$$

ce qui est bien la valeur cherchée.

La variable aléatoire  $Z = X - 1$  est à valeurs dans  $\{0, \dots, n\}$  avec  $P(Z = i) = P(X = i + 1) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i}$ . On a alors  $E(Z) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^n n \binom{n-1}{i-1} = \frac{n}{2^n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = \frac{n}{2}$ . On calcule de même la variance.

Pour le calcul de  $\mathbb{E}(e^X)$ , on a :

$$\mathbb{E}(e^X) = \sum_{i=1}^{n+1} e^i \mathbb{P}(X=i) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} e^i = \frac{e}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} e^i = \frac{e}{2^n} (1+e)^n$$

58

1. 1ère preuve : soit  $d \in \mathbb{N}$  un diviseur commun de  $ab$  et  $p$ . Comme  $d \mid p$  et  $p \wedge a = 1$ , on a  $d \wedge a = 1$ . Le lemme de Gauss assure alors que, comme  $d \mid ab$ , on a  $d \mid b$ . Finalement,  $d$  est un diviseur commun de  $b$  et  $p$ , donc  $d = 1$ .

2ème preuve : Par Bézout, il existe  $u, v, u', v' \in \mathbb{Z}$  tels que  $au + pv = 1$ , et  $bu' + pv' = 1$ . En multipliant les égalités, on obtient

$$abuu' + p(auv' + bu'v + pvv') = 1,$$

qui est une relation de Bézout, donc  $p \wedge (ab) = 1$ .

- 2a. On remarque que  $k! \binom{p}{k} = p(p-1) \dots (p-k+1)$ , donc  $p$  divise  $k! \binom{p}{k}$ . Comme  $p$  est premier et  $k < p$ , les entiers  $i \leq k$  sont premiers avec  $p$ , donc leur produit également :  $k! \wedge p = 1$ . Par le lemme de Gauss, on en déduit donc que  $p \mid \binom{p}{k}$ .

- 2b. On monte le résultat par récurrence.

- Si  $n = 0$ , on a  $n^p = 0$ , donc le résultat est vrai.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $n^p \equiv n \pmod{p}$ .

$$(n+1)^p = n^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + 1 \equiv n^p + 1 \pmod{p},$$

car pour tout  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $p$  divise  $\binom{p}{k}$ , donc  $\binom{p}{k} n^k \equiv 0 \pmod{p}$ . Par hypothèse de récurrence, on a donc  $(n+1)^p \equiv n+1 \pmod{p}$ .

- 2c. 1ère preuve : On a  $n(n^{p-1} - 1) = n^p - n \equiv 0 \pmod{p}$ . Ainsi,  $p \mid n(n^{p-1} - 1)$ . Comme  $p$  est premier et ne divise pas  $n$ , on a  $p \wedge n = 1$ , donc par le lemme de Gauss,  $p \mid n^{p-1} - 1$ , ce qui donne le résultat.

2ème preuve : Comme  $p \wedge n = 1$ , il existe  $u \in \mathbb{Z}$  inverse de  $n$  modulo  $p$ , c'est-à-dire que  $nu \equiv 1 \pmod{p}$ , donc en multipliant l'égalité précédente par  $u$ , on obtient  $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

59

1. Par l'absurde, on suppose que  $x \in \mathbb{Z}$  est solution. Alors  $x \equiv 5 \pmod{6}$  donne que  $x$  est impair, puisqu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x = 6k + 5$ .

De même,  $x \equiv 4 \pmod{8}$  donne que  $x$  est pair. D'où l'absurdité.

- 2a. Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1.$$

- 2b. Soient  $a, b \in \mathbb{N}$  tels que  $a \wedge b = 1$ , et soit  $c \in \mathbb{Z}$ .

Montrons que  $ab \mid c \Rightarrow (a \mid c \text{ et } b \mid c)$ .

Si  $ab \mid c$ , alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $c = kab$ . Ainsi,  $c = (kb)a$ , donc  $a \mid c$ . Par ailleurs,  $c = (ka)b$ , donc  $b \mid c$ .

Montrons maintenant que  $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \Rightarrow ab \mid c$ .

Comme  $a \wedge b = 1$ , il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que

$$au + bv = 1.$$

De plus, comme  $a \mid c$ , il existe  $k_1 \in \mathbb{Z}$  tel que  $c = k_1 a$ , et comme  $b \mid c$ , il existe  $k_2 \in \mathbb{Z}$  tel que  $c = k_2 b$ .

On multiplie l'égalité (??) par  $c$  :

$$cau + cbv = c.$$

Ainsi,  $(k_2 b)au + (k_1 a)bv = c$ , d'où

$$(k_2 u + k_1 v)ab = c, \text{ et } ab \mid c.$$

- 3a. En observant le système (S), on peut remarquer que  $x_0 = -11$  est une solution particulière.

- 3b. Comme  $x_0$  est solution particulière de (S), On en déduit que  $x$  est solution de (S) si et seulement si

$$\begin{cases} x - x_0 \equiv 0 \pmod{17}, \\ x - x_0 \equiv 0 \pmod{16}, \\ x - x_0 \equiv 0 \pmod{15}, \end{cases}$$

c'est-à-dire  $17 \mid (x - x_0)$ ,  $16 \mid (x - x_0)$ ,  $15 \mid (x - x_0)$ . Or,  $17 \wedge 16 = 1$ , donc, d'après la question 2b,

$$17 \times 16 \mid (x - x_0) \quad \text{et} \quad 15 \mid (x - x_0).$$

De plus,  $(17 \times 16) \wedge 15 = 1$ , donc, toujours d'après la question 2b,

$$17 \times 16 \times 15 \mid (x - x_0).$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de  $(S')$  est

$$\{x_0 + 17 \times 16 \times 15 k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

**60** Pour  $a \in H$ , on écrit  $a = x + y\sqrt{3}$ , avec  $x \in \mathbb{N}$ ,  $y \in \mathbb{Z}$  et  $x^2 - 3y^2 = 1$ . On a alors  $x = \sqrt{1 + 3y^2} > \sqrt{3}|y|$ , d'où  $a = x + y\sqrt{3} > 0$ . Ainsi,  $H \subset \mathbb{R}_+^*$ .

De plus,  $1 \in H$ , puisque  $1 = 1 + 0\sqrt{3}$  et  $1^2 - 3 \cdot 0^2 = 1$ .

Soit maintenant  $a \in H$ . On a

$$\frac{1}{a} = x - y\sqrt{3},$$

avec  $x \in \mathbb{N}$ ,  $-y \in \mathbb{Z}$  et  $x^2 - 3(-y)^2 = 1$ . Ainsi,  $\frac{1}{a} \in H$ .

Enfin, soient  $a, b \in H$ , avec  $a = x + y\sqrt{3}$  et  $b = x' + y'\sqrt{3}$  et  $x, x' \in \mathbb{N}$ ,  $y, y' \in \mathbb{Z}$ . Alors

$$ab = (xx' + 3yy') + (xy' + x'y)\sqrt{3},$$

où  $xx' + 3yy' \in \mathbb{Z}$ ,  $xy' + x'y \in \mathbb{Z}$ , et

$$(xx' + 3yy')^2 - 3(xy' + x'y)^2 = 1.$$

De plus, comme  $x > \sqrt{3}|y|$  et  $x' > \sqrt{3}|y'|$ , on obtient  $xx' + 3yy' \geq 0$ . Par conséquent,  $ab \in H$ .

**61**

1. Soient  $x, y \in G$ , on a

$$\begin{aligned} \sigma_a(xy) &= a x y a^{-1} \\ &= a x a^{-1} a y a^{-1} \\ &= \sigma_a(x) \sigma_a(y) \end{aligned}$$

Ainsi,  $\sigma_a$  est un morphisme de groupes.

Par ailleurs, si  $y \in G$ ,  $y = \sigma_a(x)$  ssi  $x = a^{-1} y a$ , donc  $\sigma_a$  est une bijection, et

$$\sigma_a^{-1} : y \mapsto a^{-1} y a.$$

En d'autres termes,  $\sigma_a^{-1} = \sigma_{a^{-1}}$ .

2. On a  $\varphi(ab) = \sigma_{ab}$ , or pour tout  $x \in G$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}(x) &= (ab) x (ab)^{-1} \\ &= a b x b^{-1} a^{-1} \\ &= \sigma_a(\sigma_b(x)). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\sigma_{ab} = \sigma_a \circ \sigma_b$ , i.e.  $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ , et  $\varphi$  est bien un morphisme de groupe.

3. On a  $S = \varphi(G) = \text{Im } \varphi$ , donc  $S$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(G)$ .

**62**

1. Supposons que  $xy$  est nilpotent, et considérons un entier  $n$  tel que  $(xy)^n = 0_A$ . Alors, on a  $y(xy)^n x = 0_A$ , ce qui se réécrit  $(yx)^{n+1} = 0_A$ , donc  $yx$  est nilpotent.

2. Soient deux entiers  $n, m$  tels que  $x^n = 0_A$  et  $y^m = 0_A$ . Nous allons montrer<sup>1</sup> que  $(x + y)^{n+m} = 0$ . Comme  $x$  et  $y$  commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$(x + y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k}.$$

Or :

1. L'exposant  $p$  tel que  $(x + y)^p = 0_A$  est trouvé ici en cherchant  $p$  tel que pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ , on ait  $x^k y^{p-k} = 0_A$ . Ceci se réécrit : si  $k < n$ , alors  $k \leq p - m$ , ce qui est vérifié si  $p \geq n + m - 1$ .



- si  $k \geq n$ , alors  $x^k = 0_A$ , donc  $x^k y^{n+m-k} = 0_A$ ,
- si  $k < n$ , alors  $n + m - k > m$ , et  $y^{n+m-k} = 0_A$ .

Ceci montre que tous les termes de la somme ci-dessus sont nuls, donc  $(x + y)^{n+m} = 0_A$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x^n = 0_A$ . Par télescopage, on a

$$(1_A - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (x^k - x^{k+1}) = 1_A - x^n = 1_A$$

Ainsi,  $(1_A - x)$  est inversible d'inverse  $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ .