

Sujet 3

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.
2. *Application 1* : Soient $p, q, r \in \mathcal{L}(E)$ trois projecteurs. On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est un projecteur. Montrer que $q = r = 0$.
3. *Application 2* : Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}(E)$ de cardinal $n \geq 1$. On pose $p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g$.
 - a. Montrer que $\forall g \in G, p \circ g = p$.
 - b. En déduire que p est un projecteur.
 - c. Montrer que $\text{Im}(p) = \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - \text{id})$ et en déduire que

$$\dim \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - \text{id}) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{tr}(g).$$

4. Réciproquement, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p) = 1$. Montrer que p est un projecteur.

Problème

Dans toute le problème, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3. Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \dots \circ u$ (n fois).

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Partie A

1. Si $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $A \sim B$ si la matrice A est semblable à la matrice B , c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que $A = P^{-1}BP$.
Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On pourra désormais dire que les matrices A et B sont semblables.
2. Démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de traces différentes ne sont pas semblables.
3. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels. On considère l'application w de $\text{Ker } u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.
 - a. Montrer que $\text{Im } w \subset \text{Ker } u^i$.
 - b. En déduire que $\dim(\text{Ker } u^{i+j}) \leq \dim(\text{Ker } u^i) + \dim(\text{Ker } u^j)$.
4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\text{rang } u = 2$.
 - a. Montrer que $\dim(\text{Ker } u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question 3b).
 - b. Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .
 - c. Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.
5. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\text{rang } u = 1$.
 - a. Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
 - b. Justifier l'existence d'un vecteur c de $\text{Ker } u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E .

c. Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1} . On pose alors

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on considère une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T$. On note par ailleurs $N = T - I_3$.

6. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.
7. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
8. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
9. On suppose dans cette question que $\text{rang}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.
 - a. Montrer que la matrice N est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et en déduire, en utilisant la question 4., une matrice semblable à la matrice M .

- b. Calculer M^3 et déterminer $\text{rang}(M)$.
 - c. Montrer que les matrices M et N sont semblables.
 - d. Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
10. On suppose dans cette question que $\text{rang}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
11. Exemple : soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

- a. Montrer que $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2) .
 - b. Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E , et écrire la matrice de u dans cette base.
 - c. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
12. Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$