

## Sujet 2

Dans tout le problème,  $E$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$  des polynômes à coefficients réels.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $E_n$  le sous-espace de  $E$  formé par les polynômes de degré au plus égal à  $n$ .

Selon l'usage, on convient d'identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

L'espace  $E_n$  est muni de sa base canonique  $\mathcal{B}_n = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ .

### Partie A : Étude d'un endomorphisme

Étant donné un polynôme  $P$  de  $E$ , on définit un polynôme  $\varphi(P)$  par :

$$\varphi(P)(X) = (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X)$$

1. Justifier qu'on a ainsi défini un endomorphisme  $\varphi$  de  $E$ .
2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , le sous-espace vectoriel  $E_n$  est stable par  $\varphi$ .

On notera désormais  $\varphi_n$  l'endomorphisme de  $E_n$  induit par  $\varphi$  sur  $E_n$  :

$$\forall P \in E_n, \varphi_n(P) = \varphi(P)$$

3. Dans cette question, on suppose que  $n$  est égal à 3 .
  - a. Écrire la matrice  $M_3$  de  $\varphi_3$  dans la base canonique de  $E_3$ .
  - b. (hors programme) Justifier que  $\varphi_3$  est diagonalisable.
  - c. (hors programme) Déterminer une base de  $E_3$  diagonalisant  $\varphi_3$ , formée de polynômes de coefficients dominants égaux à 1 .
4. On revient au cas général d'un entier naturel  $n$  quelconque.
  - a. Montrer que la matrice  $M_n$  de  $\varphi_n$  dans la base canonique est triangulaire supérieure et préciser ses coefficients diagonaux.
  - b. (hors programme) En déduire que  $\varphi_n$  est diagonalisable et préciser les dimensions de ses sous-espaces propres.

**Partie B : Étude d'une famille de polynômes** Pour tout entier naturel  $n$ , on définit le polynôme  $L_n$  par

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k.$$

1. Calculer sous forme simplifiée les polynômes  $L_0, L_1, L_2$  et  $L_3$ .
2. Calculer  $L_n(1)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Déterminer le degré de  $L_n$  en fonction de  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et donner son coefficient dominant sous la forme d'une somme.
4. En utilisant un changement d'indice, montrer que  $L_n$  a la même parité que  $n$ .
5. Vérifier, à l'aide de la formule de Leibniz, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n} \left[ (X^2 - 1)^n \right]$$

6. En déduire explicitement le coefficient dominant de  $L_n$ , puis la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

7. Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |L_n(x)| \leq \left( \frac{1+|x|}{2} \right)^n \binom{2n}{n}$$

8. On définit, pour tout entier naturel  $n$ , le polynôme  $U_n(X) = (X^2 - 1)^n$ .

a. Vérifier que :

$$(X^2 - 1) U'_n(X) = 2nXU_n(X)$$

b. En dérivant  $n + 1$  fois cette relation, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(L_n) = n(n+1)L_n$$

**Partie C : Définition d'un produit scalaire** On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$$

1. Justifier que l'on a ainsi défini un produit scalaire sur  $E$ .

Dans toute la suite du problème, l'espace  $E$  et ses sous-espaces  $E_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) seront systématiquement munis de ce produit scalaire.

2. a. Montrer que

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle \varphi(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 (1-x^2) P'(x)Q'(x)dx$$

b. Que peut-on dire déduire pour les endomorphismes  $\varphi_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ?

c. En déduire, à l'aide d'un résultat de la partie **B**, que les polynômes  $L_p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) sont deux à deux orthogonaux.

3. Soit  $n$  un entier naturel.

a. Établir par récurrence sur  $k$  que

$$\forall k \in [0, n], \langle Q, L_n \rangle = \frac{(-1)^k}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^k}{dx^k} [Q(x)] \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(x^2-1)^n] dx$$

b. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $L_n$  est orthogonal à  $E_{n-1}$ .

c. Retrouver ainsi que les polynômes  $L_p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) sont deux à deux orthogonaux.

4. a. À l'aide de C.3) a), exprimer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\|L_n\|^2$  en fonction de

$$I_n = \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx$$

b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3} I_n$$

c. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $I_n$  faisant intervenir des factorielles.

d. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

5. Donner, pour tout entier naturel  $n$ , une base orthonormée de  $E_n$ .

**Partie D : Une relation de récurrence**

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

1. Calculer le coefficient de  $X^{n+1}$  dans  $(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X)$ .

2. En déduire l'existence et l'unicité de  $n+1$  réels  $\alpha_k$  tels que

$$(n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(X)$$

3. Montrer que  $\forall k \in [0, n], \alpha_k = -(2n+1) \frac{\langle XL_n, L_k \rangle}{\|L_k\|^2}$ .

4. Pour tout  $k \in [0, n-2]$ , vérifier que  $\langle XL_n, L_k \rangle = \langle L_n, XL_k \rangle$  puis montrer que  $\alpha_k = 0$ .

5. Par des considérations de parité, montrer que  $\alpha_n = 0$ .

6. En utilisant la valeur des polynômes  $L_k$  au point 1, déterminer alors  $\alpha_{n-1}$ .

7. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)L_{n+1}(X) - (2n+1)XL_n(X) + nL_{n-1}(X) = 0$ .

**Partie E : Fonction génératrice (hors programme)**

On fixe un réel  $t$  et on considère la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} L_n(t)x^n$ , de la variable réelle  $x$ .

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1+|t|}{2}\right)^n \binom{2n}{n} x^n$ .
2. En déduire que le rayon de convergence  $R_t$  de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} L_n(t)x^n$  est strictement positif. On donnera une minoration de  $R_t$ , mais on ne cherchera pas à le calculer. On note  $S_t$  la somme de cette série entière :  $\forall x \in ]-R_t, R_t[ , S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t)x^n$
3. En utilisant le résultat de D.7), montrer que  $S_t$  est solution sur  $] -R_t, R_t [$  de l'équation différentielle suivante, d'inconnue  $y$  fonction de  $x$  :

$$(\mathcal{E}_t) (1 - 2tx + x^2) y'(x) + (x - t)y(x) = 0$$

4. Pour  $|t| < 1$ , en déduire l'expression de  $S_t(x)$  en fonction de  $x$ .

**Partie F : Projection orthogonale, calcul de distance**

1. Calculer, pour tout entier naturel  $k$ , l'intégrale

$$J_k = \int_{-1}^1 x^k \, dx$$

2. Étant donnés deux entiers naturels  $n$  et  $r$ , tels que  $0 \leq r \leq n$ , on note  $p_r$  la projection orthogonale de  $E_n$  sur son sous-espace vectoriel  $E_r$ .

Donner une expression générale de  $p_r(P)$  utilisant le produit scalaire, pour tout polynôme  $P$  de  $E_n$ .

3. On suppose désormais  $n = 3$  et  $P = X^3$ .

a. Déterminer  $p_0(P)$ ,  $p_1(P)$  et  $p_2(P)$ .

b. Calculer les distances  $d(P, E_k)$  de  $P$  aux sous-espaces vectoriels  $E_k$  pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq 2$ .

4. On note  $G$  l'ensemble des polynômes de degré 3 et de coefficient dominant égal à 1.

Montrer l'existence de

$$m = \min_{Q \in G} \int_{-1}^1 (Q(x))^2 \, dx$$

et préciser sa valeur, ainsi que les polynômes réalisant ce minimum.