

Sujet 1

Exercice

On se place dans $E = \mathbb{R}^4$.

1. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (v_1, v_2, v_3) où

$$v_1 = (1, 3, -1, 0), v_2 = (5, 4, -2, 1), v_3 = (-13, 5, 1, -4).$$

- a. Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre.
- b. Montrer que v_3 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2 .
- c. En déduire une base de F .

2. On considère le sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (u_1, u_2) où

$$u_1 = (1, 3, 0, 0), u_2 = (6, 7, -3, 2).$$

- a. Montrer que (v_1, v_2, u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.
- b. Que peut-on dire de la somme $F + G$? Justifier.
- c. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer les équations que doivent vérifier x_1, x_2, x_3, x_4 pour que x appartienne à G . On pourra échelonner un système et déterminer les conditions pour qu'il soit compatible.

3. On considère le sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 - x_2 + 7x_4 = 0, x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

- a. Déterminer une base de H .
- b. Montrer que $v_1 \in H$ et $v_2 \notin H$.
- c. En déduire une base de $F \cap H$.

Problème

Partie I : Étude de deux applications

On identifiera dans toute la suite les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & \frac{1}{2} \left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. L'application f est-elle injective? surjective?
5. Déterminer une base de $\text{Ker } \varphi$. Quelle est la dimension de $\text{Ker } \varphi$?
6. L'application φ est-elle injective? surjective?

Partie II : Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1).$$

1. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
4. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les coefficients de A^n .
6. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c .
7. En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt$$