

DS 9 – Calculs

30.05.2026 – 1h

- Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.
- Seules les réponses sont attendues, aucune justification n'est demandée.

NOM :

Prénom :

1. On dispose de n livres numérotés de 1 à n .

a. Combien y a-t-il de manières de les ranger ces livres dans une bibliothèque ?

b. Combien y a-t-il de manières de les ranger en s'assurant que les livres 1 et 2 soient côte à côte, dans cet ordre ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ éléments.a. Combien y a-t-il d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\{0, 1\}$?b. Combien y a-t-il d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\{0, 1\}$ telles que $\text{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = \{0, 1\}$?3. Dans une urne, on dispose n jetons blancs (numérotés de 1 à n) et n jetons noirs (numérotés aussi de 1 à n). Combien y a-t-il de possibilités de les tirer tous (sans remise), sans que deux jetons de même couleur ne se succèdent ?4. On considère la permutations de $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ donnée par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Ecrire σ comme produit de cycles à supports disjoints.b. Donner la signature de σ .5. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

DS 9 – Version 2

30.05.2026 – 3h

- Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.
- Il est rappelé que :
 - ★ toute affirmation doit être rigoureusement justifiée,
 - ★ tout résultat obtenu doit être mis en valeur (encadré ou souligné).
- La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

★ ★ ★

Exercice 1 – Une expérience de lancers de dés

On considère une expérience menée à l'aide d'une pièce truquée et de deux dés équilibrés portant les numéros 1 et 2.

- La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$.
- Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé 1 a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé 2 a 2 faces rouges et 4 blanches.

L'expérience est la suivante :

- on commençons par jeter la pièce,
- si on obtient Pile, on choisit le dé 1, sinon on choisit le dé 2, choix définitif pour la suite de l'expérience,
- on jette plusieurs fois le dé choisi et pour chaque lancer, on note la couleur obtenue.

On considère par ailleurs les événements suivants :

- l'événement D_1 désigne : “on joue avec le dé 1”,
- l'événement D_2 désigne : “on joue avec le dé 2”,
- pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, R_n désigne : “on a obtenu une face rouge au n -ème lancer du dé choisi”.

Une fois le dé choisi, il y a indépendance des lancers : si $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra considérer que les événements $R_1, \dots, R_n$ sont mutuellement indépendants pour les probabilités $\mathbb{P}_{D_1}$ et $\mathbb{P}_{D_2}$.

1. Préciser $\mathbb{P}(D_1)$ et $\mathbb{P}(D_2)$, et justifier que (D_1, D_2) constitue un système complet d'événements.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}_{D_1}(R_n)$ et $\mathbb{P}_{D_2}(R_n)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(R_1)$.
4. Pour $i \in \{1, 2\}$, établir un lien entre les probabilités $\mathbb{P}_{D_i}(R_1)$, $\mathbb{P}_{D_i}(R_2)$ et $\mathbb{P}_{D_i}(R_1 \cap R_2)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$.
5. Montrer que plus généralement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}.$$

En déduire $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Calculer $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(D_1)$, puis de manière générale, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(D_1) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Après n lancers ayant tous donné la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé 1 ou sur le fait d'obtenir une face rouge au lancer $n + 1$?

Exercice 2 – Un ensemble de matrices

Pour tous complexes a, b , on note $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donnée par

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

On note $E = \{M(a, b), a, b \in \mathbb{C}\}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui sont de la forme ci-dessus.

- Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Préciser $\dim E$ et donner une base de E .
- Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, calculer $\det M(a, b)$. On donnera un résultat sous forme factorisée.
Préciser une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \in \mathbb{C}$ pour que la matrice $M(a, b)$ soit inversible.
- Pour tous $a, a', b, b' \in \mathbb{C}$, calculer le produit $M(a, b) M(a', b')$.
 - Montrer que E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
- Montrer que si $M(a, b)$ est inversible, alors $M(a, b)^{-1} \in E$, et calculer $M(a, b)^{-1}$.

Problème – Théorème de Cayley-Hamilton

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Dans tout le problème, on note Id l'application identité de E .

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$, et l'application

$$\begin{aligned} P : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \det(x \text{Id} - f) \end{aligned}$$

Partie I – Propriétés générales

- Montrer que P est une fonction polynomiale de degré n . Déterminer son coefficient dominant et son terme constant.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que λ est racine de P si et seulement si $\lambda \text{Id} - f$ n'est pas injectif. Que peut-on dire dans ce cas de $\text{Ker}(\lambda \text{Id} - f)$?
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une racine de P . On pose $d = \dim \text{Ker}(\lambda \text{Id} - f)$.
 - Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E dont les d premiers vecteurs vérifient l'équation $f(x) = \lambda x$, d'inconnue $x \in E$.
 - Expliciter les d premières colonnes de la matrice représentative de f dans cette base $\mathcal{B}$.
 - En déduire que d est inférieur à la multiplicité de λ en tant que racine de P .

Partie II – Quelques endomorphismes diagonalisables

On reprend toutes les notations de la partie précédente, en supposant de plus que $\dim E = 3$ et que le polynôme P est scindé dans $\mathbb{K}$. On étudie quelques cas particuliers.

- On suppose *dans cette question seulement* que P a trois racines distinctes λ_1, λ_2 et λ_3 . Soient $x_1 \in \text{Ker}(\lambda_1 \text{Id} - f)$, $x_2 \in \text{Ker}(\lambda_2 \text{Id} - f)$ et $x_3 \in \text{Ker}(\lambda_3 \text{Id} - f)$, tels que x_1, x_2, x_3 soient tous trois non nuls.
 - Montrer que (x_1, x_2, x_3) est une base de E .
 - Quelle est la matrice de f dans cette base ?
- On suppose *dans cette question seulement* que P a deux racines distinctes λ et μ . On suppose que λ est racine simple, μ est racine double, et $\dim \text{Ker}(\mu \text{Id} - f) = 2$.
 - Montrer que $\text{Ker}(\lambda \text{Id} - f)$ et $\text{Ker}(\mu \text{Id} - f)$ sont en somme directe.
 - Justifier que $\dim \text{Ker}(\lambda \text{Id} - f) = 1$.
 - Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Partie III – Matrice compagnon

Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{r-1} \in \mathbb{K}$. On note M la matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ donnée ci-dessous, appelée matrice compagnon associée à la famille $(a_0, \dots, a_{r-1})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & . & . & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & & & . & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & & & . & a_2 \\ . & . & . & . & & & . & a_3 \\ . & & . & . & . & & . & . \\ . & & . & . & . & . & . & . \\ . & & & 0 & 1 & 0 & a_{r-2} & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & a_{r-1} \end{pmatrix}.$$

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$\det(xI_r - M) = x^r - \sum_{k=0}^{r-1} a_k x^k.$$

Partie IV – Polynômes d'endomorphisme

Pour tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$, noté $A = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k$, on note $A(f)$ l'endomorphisme défini par $A(f) = \sum_{k=0}^p \alpha_k f^k$.

7. Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $s \in \mathbb{N}^*$. On note $\tilde{A} = X^s A$. Montrer que $f^s \circ A(f) = \tilde{A}(f)$.

8. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $(BA)(f) = B(f) \circ A(f)$.

Partie V – Théorème de Cayley-Hamilton

Soit x un vecteur non nul de E . On note $\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{N}^*, (x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)) \text{ est libre}\}$.

9. Montrer que $\mathcal{E}$ admet un plus grand élément r , et que $r \leq n$.

10. En déduire qu'il existe $a_0, \dots, a_{r-1} \in \mathbb{K}$ tels que $f^r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k f^k(x)$.

11. Justifier alors l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de E dont les r premiers vecteurs sont

$$(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x)).$$

12. Expliciter les r premières colonnes de la matrice représentative de f dans cette base $\mathcal{B}'$.

13. En déduire l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = Q \times \left(X^r - \sum_{k=0}^{r-1} a_k X^k \right).$$

14. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton : $P(f) = 0$.

★ ★ ★