

DS 9 – Calculs

30.05.2026 – 1h

- Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.
- Seules les réponses sont attendues, aucune justification n'est demandée.

NOM :

Prénom :

1. On dispose de n livres numérotés de 1 à n .

a. Combien y a-t-il de manières de les ranger ces livres dans une bibliothèque ?

b. Combien y a-t-il de manières de les ranger en s'assurant que les livres 1 et 2 soient côte à côte, dans cet ordre ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ éléments.a. Combien y a-t-il d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\{0, 1\}$?b. Combien y a-t-il d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\{0, 1\}$ telles que $\text{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = \{0, 1\}$?3. Dans une urne, on dispose n jetons blancs (numérotés de 1 à n) et n jetons noirs (numérotés aussi de 1 à n). Combien y a-t-il de possibilités de les tirer tous (sans remise), sans que deux jetons de même couleur ne se succèdent ?4. On considère la permutations de $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ donnée par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Ecrire σ comme produit de cycles à supports disjoints.b. Donner la signature de σ .5. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

DS 9 – Version 1

30.05.2026 – 3h

- Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.
- Il est rappelé que :
 - ★ toute affirmation doit être rigoureusement justifiée,
 - ★ tout résultat obtenu doit être mis en valeur (encadré ou souligné).
- La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

★ ★ ★

Exercice 1 – Une expérience de lancers de dés

On considère une expérience menée à l'aide d'une pièce truquée et de deux dés équilibrés portant les numéros 1 et 2.

- La probabilité d'obtenir Pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$.
- Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé 1 a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé 2 a 2 faces rouges et 4 blanches.

L'expérience est la suivante :

- on commençons par jeter la pièce,
- si on obtient Pile, on choisit le dé 1, sinon on choisit le dé 2, choix définitif pour la suite de l'expérience,
- on jette plusieurs fois le dé choisi et pour chaque lancer, on note la couleur obtenue.

On considère par ailleurs les événements suivants :

- l'événement D_1 désigne : “on joue avec le dé 1”,
- l'événement D_2 désigne : “on joue avec le dé 2”,
- pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, R_n désigne : “on a obtenu une face rouge au n -ème lancer du dé choisi”.

Une fois le dé choisi, il y a indépendance des lancers : si $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra considérer que les événements $R_1, \dots, R_n$ sont mutuellement indépendants pour les probabilités $\mathbb{P}_{D_1}$ et $\mathbb{P}_{D_2}$.

1. Préciser $\mathbb{P}(D_1)$ et $\mathbb{P}(D_2)$, et justifier que (D_1, D_2) constitue un système complet d'événements.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}_{D_1}(R_n)$ et $\mathbb{P}_{D_2}(R_n)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(R_1)$.
4. Pour $i \in \{1, 2\}$, établir un lien entre les probabilités $\mathbb{P}_{D_i}(R_1)$, $\mathbb{P}_{D_i}(R_2)$ et $\mathbb{P}_{D_i}(R_1 \cap R_2)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$.
5. Montrer que plus généralement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}.$$

En déduire $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Calculer $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(D_1)$, puis de manière générale, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(D_1) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Après n lancers ayant tous donné la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé 1 ou sur le fait d'obtenir une face rouge au lancer $n + 1$?

Exercice 2 – Un ensemble de matrices

Pour tous complexes a, b , on note $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donnée par

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

On note $E = \{M(a, b), a, b \in \mathbb{C}\}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui sont de la forme ci-dessus.

- Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Préciser $\dim E$ et donner une base de E .
- Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, calculer $\det M(a, b)$. On donnera un résultat sous forme factorisée.
Préciser une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \in \mathbb{C}$ pour que la matrice $M(a, b)$ soit inversible.
- Pour tous $a, a', b, b' \in \mathbb{C}$, calculer le produit $M(a, b) M(a', b')$.
 - Montrer que E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
- Montrer que si $M(a, b)$ est inversible, alors $M(a, b)^{-1} \in E$, et calculer $M(a, b)^{-1}$.

Problème – Trigonalisation d'un endomorphisme

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3 = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, que l'on pourra identifier à $\mathbb{R}^3$ si besoin. On note par ailleurs $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E .

On considère l'endomorphisme de E suivant :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & +2y & +2z \\ & 2y & +z \\ -x & +2y & +2z \end{pmatrix}.$$

On note Id l'application identité de E et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- On note M la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme f , c'est-à-dire que $M = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.
 - Expliciter la matrice M .
 - Vérifier que $\text{rg } M = 3$. Que peut-on en déduire concernant l'endomorphisme f ?
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer

$$\det(\lambda I_3 - M)$$

On donnera un résultat factorisé.

- Montrer qu'il existe exactement deux réels λ tels que la matrice $\lambda I_3 - M$ n'est pas inversible. On notera ces deux valeurs respectives λ_1 et λ_2 , avec la condition $\lambda_1 < \lambda_2$.
- Déterminer les rangs des matrices $\lambda_1 I_3 - M$ et $\lambda_2 I_3 - M$.
- En déduire que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(\lambda_1 \text{Id} - f)$ et $\text{Ker}(\lambda_2 \text{Id} - f)$ sont de dimension 1. Justifier qu'ils sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans E ?
- Chercher, si c'est possible, un vecteur de $\text{Ker}(\lambda_1 \text{Id} - f)$ sous la forme

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \star \\ \star \end{pmatrix}.$$

- Chercher, si c'est possible, un vecteur de $\text{Ker}(\lambda_2 \text{Id} - f)$ sous la forme

$$b_2 = \begin{pmatrix} \star \\ 1 \\ \star \end{pmatrix}.$$

- Montrer qu'il existe une infinité de vecteurs b_3 vérifiant $f(b_3) = b_2 + 2b_3$: donner une description paramétrique de ces vecteurs.
 - Montrer que, parmi ces vecteurs, il y en a un, et un seul, de la forme

$$b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ \star \\ \star \end{pmatrix}.$$

Dans toute la suite, b_3 désigne ce vecteur particulier.

- c. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de E .
4. On note T la matrice de l'endomorphisme f relativement à la base $\mathcal{B}$, c'est-dire que $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
- a. Montrer que T est une matrice triangulaire supérieure.
- b. Dans toute la suite, on note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$. Donner l'expression de Q .
- c. Justifier que la matrice Q est inversible et calculer son inverse.
- d. Donner la relation liant les matrices M, T, Q et Q^{-1} .
5. a. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe un réel α_n tel que

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

et exprimer α_n en fonction de n .

- b. Donner la relation de récurrence satisfaite par la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$.
6. Dédurre, de ce qui précède l'expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

★ ★ ★