

DS 9 – Calculs

Corrigé

1. On dispose de n livres numérotés de 1 à n .
- Combien y a-t-il de manières de les ranger ces livres dans une bibliothèque ?
 - Combien y a-t-il de manières de les ranger en s'assurant que les livres 1 et 2 soient côte à côte, dans cet ordre ?

- a. $n!$
b. $(n-1)!$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ éléments.
- Combien y a-t-il d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\{0, 1\}$?
 - Combien y a-t-il d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\{0, 1\}$ telles que $\text{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = \{0, 1\}$?

- a. 2^n .
b. $2^n - 2$.

3. Dans une urne, on dispose n jetons blancs (numérotés de 1 à n) et n jetons noirs (numérotés aussi de 1 à n). Combien y a-t-il de possibilités de les tirer tous (sans remise), sans que deux jetons de même couleur ne se succèdent ?

$$2 \times (n!)^2.$$

4. On considère la permutations de $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ donnée par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

- a. Ecrire σ comme produit de cycles à supports disjoints.

$$\sigma = (1\ 2)(4\ 5\ 7\ 8\ 6\ 9).$$

- b. Donner la signature de σ .

$$\varepsilon(\sigma) = 1.$$

5. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

7.

6. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Donner sous forme factorisée le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$a(b-a)(c-b)(d-c)$$

7. Déterminer l'ensemble des complexes λ tels que la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -1 & 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

$$\{1, 3\}.$$

8. Calculer les sommes de séries suivantes.

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}.$

b. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}.$

a. 1.
b. $\frac{1}{4}.$

9. a. Donner un développement de $f : x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x}}$ à la précision $\frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

- b. Donner l'équation de l'asymptote de la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
c. Comment la courbe de f est-elle située par rapport à son asymptote ?

La courbe est au-dessus.

10. Donner un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes au point précisé.

a. $f : x \mapsto \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x}}$ en $+\infty$.

b. $g : x \mapsto \frac{x^{(x^x)}}{x^x - 1}$ en 0.

c. $h : x \mapsto \cos(\sin x) + e^{\cos x - 1} - 2.$

- a. $\sqrt{x}$.
b. $\frac{1}{\ln x}$.
c. $-x^2$.

11. a. Déterminer un développement de $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ à la précision $\frac{1}{n\sqrt{n}}$.
b. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

- a. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
b. La série diverge.

12. Soient p, n deux entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $n \geq p$. Déterminer le nombre de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^p$ de l'équation d'inconnue $(x_1, \dots, x_p)$

$$x_1 + \dots + x_p = n.$$

$$\binom{n-1}{p-1}.$$