

DS 9 – Version 2

Corrigé

Exercice 1 – Une expérience de lancers de dés

On considère une expérience menée à l'aide d'une pièce truquée et de deux dés équilibrés portant les numéros 1 et 2.

- La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$.
- Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé 1 a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé 2 a 2 faces rouges et 4 blanches.

L'expérience est la suivante :

- on commençons par jeter la pièce,
- si on obtient Pile, on choisit le dé 1, sinon on choisit le dé 2, choix définitif pour la suite de l'expérience,
- on jette plusieurs fois le dé choisi et pour chaque lancer, on note la couleur obtenue.

On considère par ailleurs les événements suivants :

- l'événement D_1 désigne : “on joue avec le dé 1”,
- l'événement D_2 désigne : “on joue avec le dé 2”,
- pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, R_n désigne : “on a obtenu une face rouge au n -ème lancer du dé choisi”.

Une fois le dé choisi, il y a indépendance des lancers : si $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra considérer que les événements $R_1, \dots, R_n$ sont mutuellement indépendants pour les probabilités $\mathbb{P}_{D_1}$ et $\mathbb{P}_{D_2}$.

1. Préciser $\mathbb{P}(D_1)$ et $\mathbb{P}(D_2)$, et justifier que (D_1, D_2) constitue un système complet d'événements.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}_{D_1}(R_n)$ et $\mathbb{P}_{D_2}(R_n)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(R_1)$.
4. Pour $i \in \{1, 2\}$, établir un lien entre les probabilités $\mathbb{P}_{D_i}(R_1), \mathbb{P}_{D_i}(R_2)$ et $\mathbb{P}_{D_i}(R_1 \cap R_2)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$.
5. Montrer que plus généralement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}.$$

En déduire $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Calculer $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(D_1)$, puis de manière générale, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(D_1) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Après n lancers ayant tous donné la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé 1 ou sur le fait d'obtenir une face rouge au lancer $n + 1$?

1. On a $\mathbb{P}(D_1) = \frac{1}{3}$, et $\mathbb{P}(D_2) = \frac{2}{3}$. On a $D_2 = \overline{D_1}$, donc les événements D_1 et D_2 forment un système complet d'événements.
2. On a $\mathbb{P}_{D_1}(R_n) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}_{D_2}(R_n) = \frac{1}{3}$.
3. Par la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}_{D_1}(R_1)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}_{D_2}(R_1)\mathbb{P}(D_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

4. On a $\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}_{D_1}(R_1)\mathbb{P}_{D_1}(R_2) = \frac{4}{9}$ par indépendance des événements R_1 et R_2 pour la probabilité $\mathbb{P}_{D_1}$, et $\mathbb{P}_{D_2}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}_{D_2}(R_1)\mathbb{P}_{D_2}(R_2) = \frac{1}{9}$. Ainsi, toujours par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}_{D_2}(R_1 \cap R_2)\mathbb{P}(D_2) = \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{2}{9}.$$

5. Avec le même raisonnement, on obtient toujours par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n R_i\right) = \mathbb{P}_{D_1}\left(\bigcap_{i=1}^n R_i\right) \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}_{D_2}\left(\bigcap_{i=1}^n R_i\right) \mathbb{P}(D_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{2}{3} = \frac{2^n+2}{3^{n+1}}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_{n+1})}{\mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_n)} = \frac{2^{n+1}+2}{3^{n+2}} \frac{3^{n+1}}{2^n+2} = \frac{2^n+1}{3(2^{n-1}+1)}.$$

6. Par la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(D_1) = \frac{\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2) \mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{4}{9} \frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Toujours par la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(D_1) = \frac{\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap \dots \cap R_n) \mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_n)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} \frac{3^{n+1}}{2^n+2} = \frac{2^n}{2^n+2}.$$

car on a $\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap \dots \cap R_n) = \mathbb{P}_{D_1}(R_1) \dots \mathbb{P}_{D_1}(R_n)$ par indépendance mutuelle des éléments $R_1, \dots, R_n$ pour la probabilité $\mathbb{P}_{D_1}$.

7. Nous cherchons à comparer les probabilités $\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(D_1)$ et $\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$. On a :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(D_1) - \mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1}) = \frac{2^n}{2^n+2} - \frac{2^{n+1}+2}{3(2^n+2)} = \frac{2^n-2}{3(2^n+2)}.$$

Ainsi, $\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(D_1) - \mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$ est du signe de $2^n - 2$.

On en déduit que si $n = 1$, les deux paris ont même chance de l'emporter, et il devient préférable de parier sur le fait qu'on a le dé numéro 1 à partir du deuxième lancer.

Exercice 2 – Un ensemble de matrices

Pour tous complexes a, b , on note $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donnée par

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

On note $E = \{M(a, b), a, b \in \mathbb{C}\}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui sont de la forme ci-dessus.

- Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Préciser $\dim E$ et donner une base de E .
- Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, calculer $\det M(a, b)$. On donnera un résultat sous forme factorisée.
Préciser une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \in \mathbb{C}$ pour que la matrice $M(a, b)$ soit inversible.
- Pour tous $a, a', b, b' \in \mathbb{C}$, calculer le produit $M(a, b) M(a', b')$.
 - Montrer que E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
- Montrer que si $M(a, b)$ est inversible, alors $M(a, b)^{-1} \in E$, et calculer $M(a, b)^{-1}$.

- On a $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Comme les deux matrices ci-dessus en sont pas colinéaires, la famille qu'elle forme est libre, et c'est donc une base de E . Ainsi, $\dim E = 2$.

- En effectuant successivement $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, une mise en facteur sur la première colonne, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient une matrice triangulaire supérieure.

$$\det M(a, b) = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2b & b & b \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\det M(a, b) = (a + 2b)(a - b)^2.$$

Par conséquent, $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $a \neq b$ et $a \neq -2b$.

3. a. On obtient facilement

$$M(a, b) M(a', b') = M(aa' + 2bb', ab' + ba' + bb').$$

- b. L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et par conséquent un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

De plus, la question précédente montre que E est stable par multiplication interne.

La matrice unité $I = M(1, 0)$ appartient à E , donc E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Enfin, bien que le produit matriciel ne soit pas commutatif dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, il l'est dans E , car la question précédente donne

$$M(a, b)M(a', b') = M(a', b')M(a, b).$$

4. On cherche quand $M(a, b)$ est inversible dans E , i.e. quand il existe (a', b') tel que

$$M(a, b)M(a', b') = I = M(1, 0).$$

D'après 3a., cela équivaut au système

$$\begin{cases} aa' + 2bb' = 1 \\ ab' + ba' + bb' = 0 \end{cases}$$

soit un système linéaire en a', b' de déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a+b \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b).$$

On a $D \neq 0 \Leftrightarrow \det M(a, b) \neq 0$, donc $M(a, b)$ est inversible dans E si et seulement si elle est inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Dans ce cas,

$$M(a, b)^{-1} = M\left(\frac{a+b}{(a-b)(a+2b)}, \frac{-b}{(a-b)(a+2b)}\right).$$

Problème – Théorème de Cayley-Hamilton

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Dans tout le problème, on note Id l'application identité de E .

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$, et l'application

$$\begin{aligned} P : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \det(x \text{Id} - f) \end{aligned}$$

Partie I – Propriétés générales

- Montrer que P est une fonction polynomiale de degré n . Déterminer son coefficient dominant et son terme constant.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que λ est racine de P si et seulement si $\lambda \text{Id} - f$ n'est pas injectif. Que peut-on dire dans ce cas de $\text{Ker}(\lambda \text{Id} - f)$?
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une racine de P . On pose $d = \dim \text{Ker}(\lambda \text{Id} - f)$.
 - Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E dont les d premiers vecteurs vérifient l'équation $f(x) = \lambda x$, d'inconnue $x \in E$.
 - Expliciter les d premières colonnes de la matrice représentative de f dans cette base $\mathcal{B}$.
 - En déduire que d est inférieur à la multiplicité de λ en tant que racine de P .

Partie II – Quelques endomorphismes diagonalisables

On reprend toutes les notations de la partie précédente, en supposant de plus que $\dim E = 3$ et que le polynôme P est scindé dans $\mathbb{K}$. On étudie quelques cas particuliers.

4. On suppose *dans cette question seulement* que P a trois racines distinctes λ_1, λ_2 et λ_3 . Soient $x_1 \in \text{Ker}(\lambda_1 \text{Id} - f)$, $x_2 \in \text{Ker}(\lambda_2 \text{Id} - f)$ et $x_3 \in \text{Ker}(\lambda_3 \text{Id} - f)$, tels que x_1, x_2, x_3 soient tous trois non nuls.
- Montrer que (x_1, x_2, x_3) est une base de E .
 - Quelle est la matrice de f dans cette base ?
5. On suppose *dans cette question seulement* que P a deux racines distinctes λ et μ . On suppose que λ est racine simple, μ est racine double, et $\dim \text{Ker}(\mu \text{Id} - f) = 2$.
- Montrer que $\text{Ker}(\lambda \text{Id} - f)$ et $\text{Ker}(\mu \text{Id} - f)$ sont en somme directe.
 - Justifier que $\dim \text{Ker}(\lambda \text{Id} - f) = 1$.
 - Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Partie III – Matrice compagnon

Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{r-1} \in \mathbb{K}$. On note M la matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ donnée ci-dessous, appelée matrice compagnon associée à la famille $(a_0, \dots, a_{r-1})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & . & . & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & & & . & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & & & . & a_2 \\ . & . & . & . & & & . & a_3 \\ . & & . & . & . & & . & . \\ . & & . & . & . & . & . & . \\ . & & & 0 & 1 & 0 & a_{r-2} & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & a_{r-1} \end{pmatrix}.$$

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$\det(xI_r - M) = x^r - \sum_{k=0}^{r-1} a_k x^k.$$

Partie IV – Polynômes d'endomorphisme

Pour tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$, noté $A = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k$, on note $A(f)$ l'endomorphisme défini par $A(f) = \sum_{k=0}^p \alpha_k f^k$.

- Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $s \in \mathbb{N}^*$. On note $\tilde{A} = X^s A$. Montrer que $f^s \circ A(f) = \tilde{A}(f)$.
- Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $(BA)(f) = B(f) \circ A(f)$.

Partie V – Théorème de Cayley-Hamilton

Soit x un vecteur non nul de E . On note $\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{N}^*, (x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)) \text{ est libre}\}$.

9. Montrer que $\mathcal{E}$ admet un plus grand élément r , et que $r \leq n$.

10. En déduire qu'il existe $a_0, \dots, a_{r-1} \in \mathbb{K}$ tels que $f^r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k f^k(x)$.

11. Justifier alors l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de E dont les r premiers vecteurs sont

$$(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x)).$$

12. Expliciter les r premières colonnes de la matrice représentative de f dans cette base $\mathcal{B}'$.

13. En déduire l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = Q \times \left(X^r - \sum_{k=0}^{r-1} a_k X^k \right).$$

14. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton : $P(f) = 0$.

1. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de $u - x\text{Id}$ dans la base canonique. Alors $P = \det(u - x\text{Id}) = \det(A)$. Mais

$$P = \det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}.$$

On voit avec cette formule que $\det(A)$ est un polynôme en les coefficients de A , donc c'est un polynôme en x , puisque x intervient dans les coefficients de A .

Le terme constant de P est $P(0)$, soit $\det(u)$.

On voit enfin que le terme de plus haut degré est celui correspondant au produit des termes de la diagonale de A , dans lequel apparaît le terme $(-x)^n$: le coefficient dominant de P est donc $(-1)^n$.

2. λ est racine de P ssi

$$\det(u - \lambda \text{Id}) = 0 \iff u - \lambda \text{Id} \text{ n'est pas inversible} \iff u - \lambda \text{Id} \text{ n'est pas injective}$$

(car E est de dimension finie). Dans ce cas on a bien sûr $\ker(u - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}$.

3. a. Soit $(v_1, \dots, v_d)$ une base de $\ker(u - \lambda \text{Id})$. On complète cette base en une base $\mathcal{B}$ de E . Les d premiers vecteurs de cette base sont dans $\ker(u - \lambda \text{Id})$ et vérifient donc l'équation $u(x) = \lambda x$ d'après la question précédente.
b. Les d premières colonnes de cette matrice sont

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \lambda & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \lambda & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

- c. Ainsi, par blocs,

$$M_{\mathcal{B}}(u - x \text{Id}) = \begin{pmatrix} (\lambda - x)I_d & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où B et C sont deux matrices non déterminées.

Ainsi

$$P = \det(u - x \text{Id}) = \det((\lambda - x)I_d) \det(C) = (\lambda - x)^d \det(C).$$

Ainsi λ est de multiplicité au moins d dans P .

4. a. On a $ae + bf + cg = 0$, donc

$$(u - \alpha \text{Id})(ae + bf + cg) = 0.$$

Mais $e \in \ker(u - \alpha \text{Id})$, donc

$$0 = (u - \alpha \text{Id})(bf + cg) = b(u(f) - \alpha f) + c(u(g) - \alpha g) = b(\beta - \alpha)f + c(\gamma - \alpha)g.$$

On en déduit

$$0 = (u - \beta \text{Id})(b(\beta - \alpha)f + c(\gamma - \alpha)g) = (u - \beta \text{Id})(c(\gamma - \alpha)g),$$

car $f \in \ker(u - \beta \text{Id})$, et donc

$$0 = c(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)g.$$

Mais $\gamma \neq \alpha$ et $\gamma \neq \beta$, donc forcément $c = 0$.

En revenant aux équations précédentes, il vient

$$b(\beta - \alpha)f = 0,$$

et donc $b = 0$, et enfin $ae = 0$, donc $a = 0$. Ceci prouve que (e, f, g) est libre, donc est une base de E .

- b. Puisque $u(e) = \alpha e$, $u(f) = \beta f$ et $u(g) = \gamma g$, la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

5. a. Soit $x \in \ker(u - \alpha \text{Id}) \cap \ker(u - \beta \text{Id})$. Alors $u(x) = \alpha x$, mais aussi $u(x) = \beta x$, donc

$$(\alpha - \beta)x = 0.$$

Mais $\alpha \neq \beta$, donc $x = 0$, et ainsi

$$\ker(u - \alpha \text{Id}) \cap \ker(u - \beta \text{Id}) = \{0\}.$$

- b. On utilise la question 3)c), qui implique directement le résultat.

- c. Soit e un vecteur non nul de $\ker(u - \alpha \text{Id})$: il en forme donc une base. Soient (f, g) une base de $\ker(u - \beta \text{Id})$. Puisque

$$\dim \ker(u - \alpha \text{Id}) + \dim \ker(u - \beta \text{Id}) = 3$$

et que ces deux sev sont en somme directe, ils sont supplémentaires : (e, f, g) est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Or $u(e) = \alpha e$, $u(f) = \beta f$, $u(g) = \beta g$, donc la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

qui est bien diagonale.

6. On développe par rapport à la dernière colonne et on trouve :

$$\det(M - xI_r) = \sum_{k=0}^{r-2} (-1)^{k+r+1} a_k \det(M_k) + (a_{r-1} - x)(-x)^{r-1},$$

où M_k est la matrice

$$M_k = \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_k \end{pmatrix},$$

avec

$$A_k = \begin{pmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}), \quad \text{et} \quad B_k = \begin{pmatrix} 1 & -x & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\det(M_k) = \det(A_k) \det(B_k) = (-x)^k.$$

Ceci assure bien le résultat voulu.

7. On note

$$A = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k.$$

Alors

$$u^s(A(u)) = u^s\left(\sum_{k=0}^p \alpha_k u^k\right) = \sum_{k=0}^p \alpha_k u^{k+s} = \tilde{A}(u),$$

car

$$\tilde{A} = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^{k+s}.$$

8. On note

$$B = \sum_{i=0}^q \beta_i X^i.$$

Alors

$$(BA)(u) = \left(\sum_{i=0}^q \beta_i (X^i A)\right)(u) = \sum_{i=0}^q \beta_i (X^i A)(u) = \sum_{i=0}^q \beta_i (u^i \circ A(u)) = \left(\sum_{i=0}^q \beta_i u^i\right) \circ A(u) = B(u) \circ A(u).$$

9. Puisque $x \neq 0$, $1 \in E$, donc $\mathcal{E} \neq \emptyset$. De plus $\mathcal{E} \subset \mathbb{N}$.

Enfin, puisque E est de dimension n , toute famille d'au moins $n+1$ éléments est liée, donc $\mathcal{E}$ est majoré par n . $\mathcal{E}$ admet donc un maximum r , nécessairement plus petit que n .

10. Puisque r est un plus grand élément, il appartient à E , donc $(x, u(x), \dots, u^{r-1}(x))$ est libre, mais pas $(x, u(x), \dots, u^r(x))$, sinon $r+1$ appartiendrait à E .

Ainsi $u^r(x)$ est combinaison linéaire de $(x, u(x), \dots, u^{r-1}(x))$, d'où le résultat.

11. La famille $(x, u(x), \dots, u^{r-1}(x))$ étant libre, il suffit de la compléter en une base de E .

12. On note $(e_1, \dots, e_n)$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. Alors, pour tout i de 1 à $r-1$, on a $u(e_i) = e_{i+1}$, et enfin

$$u(e_r) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k e_{k+1}.$$

Les r premières colonnes de la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ sont donc

$$\begin{pmatrix} & M & \\ 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix},$$

où M est la matrice de la question 6.

13. La matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est donc

$$\begin{pmatrix} M & N \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

où N et R sont des matrices non déterminées. On a ainsi

$$P = \det(M - x\text{Id}) \det(R - x\text{Id}).$$

En posant

$$Q = \det(R - x\text{Id}),$$

et avec la question 6), on obtient

$$P = Q \left(X^r - \sum_{k=0}^{r-1} a_k X^k \right).$$

14. Finalement,

$$P(u) = Q(u) \circ \left(u^r - \sum_{k=0}^{r-1} a_k u^k \right).$$

En particulier,

$$P(u)(x) = Q(u) \left(u^r - \sum_{k=0}^{r-1} a_k u^k \right) (x) = 0,$$

car

$$u^r(x) - \sum_{k=0}^{r-1} a_k u^k(x) = 0.$$

Or ce résultat est vrai pour tout $x \in E$, donc $\forall x \in E$, $P(u)(x) = 0$, c'est-à-dire $P(u) = 0$.