

DS 9 – Version 1

Corrigé

Exercice 1 – Une expérience de lancers de dés

On considère une expérience menée à l'aide d'une pièce truquée et de deux dés équilibrés portant les numéros 1 et 2.

- La probabilité d'obtenir Pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$.
- Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé 1 a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé 2 a 2 faces rouges et 4 blanches.

L'expérience est la suivante :

- on commençons par jeter la pièce,
- si on obtient Pile, on choisit le dé 1, sinon on choisit le dé 2, choix définitif pour la suite de l'expérience,
- on jette plusieurs fois le dé choisi et pour chaque lancer, on note la couleur obtenue.

On considère par ailleurs les événements suivants :

- l'événement D_1 désigne : “on joue avec le dé 1”,
- l'événement D_2 désigne : “on joue avec le dé 2”,
- pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, R_n désigne : “on a obtenu une face rouge au n -ème lancer du dé choisi”.

Une fois le dé choisi, il y a indépendance des lancers : si $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra considérer que les événements $R_1, \dots, R_n$ sont mutuellement indépendants pour les probabilités $\mathbb{P}_{D_1}$ et $\mathbb{P}_{D_2}$.

1. Préciser $\mathbb{P}(D_1)$ et $\mathbb{P}(D_2)$, et justifier que (D_1, D_2) constitue un système complet d'événements.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}_{D_1}(R_n)$ et $\mathbb{P}_{D_2}(R_n)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(R_1)$.
4. Pour $i \in \{1, 2\}$, établir un lien entre les probabilités $\mathbb{P}_{D_i}(R_1), \mathbb{P}_{D_i}(R_2)$ et $\mathbb{P}_{D_i}(R_1 \cap R_2)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$.
5. Montrer que plus généralement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}.$$

En déduire $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Calculer $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(D_1)$, puis de manière générale, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(D_1) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Après n lancers ayant tous donné la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé 1 ou sur le fait d'obtenir une face rouge au lancer $n + 1$?

1. On a $\mathbb{P}(D_1) = \frac{1}{3}$, et $\mathbb{P}(D_2) = \frac{2}{3}$. On a $D_2 = \overline{D_1}$, donc les événements D_1 et D_2 forment un système complet d'événements.
2. On a $\mathbb{P}_{D_1}(R_n) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}_{D_2}(R_n) = \frac{1}{3}$.
3. Par la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}_{D_1}(R_1)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}_{D_2}(R_1)\mathbb{P}(D_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

4. On a $\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}_{D_1}(R_1)\mathbb{P}_{D_1}(R_2) = \frac{4}{9}$ par indépendance des événements R_1 et R_2 pour la probabilité $\mathbb{P}_{D_1}$, et $\mathbb{P}_{D_2}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}_{D_2}(R_1)\mathbb{P}_{D_2}(R_2) = \frac{1}{9}$. Ainsi, toujours par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}_{D_2}(R_1 \cap R_2)\mathbb{P}(D_2) = \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{2}{9}.$$

5. Avec le même raisonnement, on obtient toujours par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n R_i\right) = \mathbb{P}_{D_1}\left(\bigcap_{i=1}^n R_i\right) \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}_{D_2}\left(\bigcap_{i=1}^n R_i\right) \mathbb{P}(D_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{2}{3} = \frac{2^n+2}{3^{n+1}}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_{n+1})}{\mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_n)} = \frac{2^{n+1}+2}{3^{n+2}} \frac{3^{n+1}}{2^n+2} = \frac{2^n+1}{3(2^{n-1}+1)}.$$

6. Par la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(D_1) = \frac{\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap R_2) \mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{4}{9} \frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Toujours par la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(D_1) = \frac{\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap \dots \cap R_n) \mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_n)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} \frac{3^{n+1}}{2^n+2} = \frac{2^n}{2^n+2}.$$

car on a $\mathbb{P}_{D_1}(R_1 \cap \dots \cap R_n) = \mathbb{P}_{D_1}(R_1) \dots \mathbb{P}_{D_1}(R_n)$ par indépendance mutuelle des éléments $R_1, \dots, R_n$ pour la probabilité $\mathbb{P}_{D_1}$.

7. Nous cherchons à comparer les probabilités $\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(D_1)$ et $\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$. On a :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(D_1) - \mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1}) = \frac{2^n}{2^n+2} - \frac{2^{n+1}+2}{3(2^n+2)} = \frac{2^n-2}{3(2^n+2)}.$$

Ainsi, $\mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(D_1) - \mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$ est du signe de $2^n - 2$.

On en déduit que si $n = 1$, les deux paris ont même chance de l'emporter, et il devient préférable de parier sur le fait qu'on a le dé numéro 1 à partir du deuxième lancer.

Exercice 2 – Un ensemble de matrices

Pour tous complexes a, b , on note $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donnée par

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

On note $E = \{M(a, b), a, b \in \mathbb{C}\}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui sont de la forme ci-dessus.

- Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Préciser $\dim E$ et donner une base de E .
- Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, calculer $\det M(a, b)$. On donnera un résultat sous forme factorisée.
Préciser une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \in \mathbb{C}$ pour que la matrice $M(a, b)$ soit inversible.
- Pour tous $a, a', b, b' \in \mathbb{C}$, calculer le produit $M(a, b) M(a', b')$.
 - Montrer que E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
- Montrer que si $M(a, b)$ est inversible, alors $M(a, b)^{-1} \in E$, et calculer $M(a, b)^{-1}$.

- On a $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Comme les deux matrices ci-dessus en sont pas colinéaires, la famille qu'elle forme est libre, et c'est donc une base de E . Ainsi, $\dim E = 2$.

- En effectuant successivement $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, une mise en facteur sur la première colonne, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient une matrice triangulaire supérieure.

$$\det M(a, b) = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2b & b & b \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\det M(a, b) = (a + 2b)(a - b)^2.$$

Par conséquent, $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $a \neq b$ et $a \neq -2b$.

3. a. On obtient facilement

$$M(a, b) M(a', b') = M(aa' + 2bb', ab' + ba' + bb').$$

- b. L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et par conséquent un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

De plus, la question précédente montre que E est stable par multiplication interne.

La matrice unité $I = M(1, 0)$ appartient à E , donc E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Enfin, bien que le produit matriciel ne soit pas commutatif dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, il l'est dans E , car la question précédente donne

$$M(a, b)M(a', b') = M(a', b')M(a, b).$$

4. On cherche quand $M(a, b)$ est inversible dans E , i.e. quand il existe (a', b') tel que

$$M(a, b)M(a', b') = I = M(1, 0).$$

D'après 3a., cela équivaut au système

$$\begin{cases} aa' + 2bb' = 1 \\ ab' + ba' + bb' = 0 \end{cases}$$

soit un système linéaire en a', b' de déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a+b \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b).$$

On a $D \neq 0 \Leftrightarrow \det M(a, b) \neq 0$, donc $M(a, b)$ est inversible dans E si et seulement si elle est inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Dans ce cas,

$$M(a, b)^{-1} = M\left(\frac{a+b}{(a-b)(a+2b)}, \frac{-b}{(a-b)(a+2b)}\right).$$

Problème – Trigonalisation d'un endomorphisme

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3 = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, que l'on pourra identifier à $\mathbb{R}^3$ si besoin. On note par ailleurs $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E .

On considère l'endomorphisme de E suivant :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & +2y & +2z \\ & 2y & +z \\ -x & +2y & +2z \end{pmatrix}.$$

On note Id l'application identité de E et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On note M la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme f , c'est-à-dire que $M = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

a. Expliciter la matrice M .

b. Vérifier que $\text{rg } M = 3$. Que peut-on en déduire concernant l'endomorphisme f ?

2. a. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer

$$\det(\lambda I_3 - M)$$

On donnera un résultat factorisé.

b. Montrer qu'il existe exactement deux réels λ tels que la matrice $\lambda I_3 - M$ n'est pas inversible. On notera ces deux valeurs respectives λ_1 et λ_2 , avec la condition $\lambda_1 < \lambda_2$.

c. Déterminer les rangs des matrices $\lambda_1 I_3 - M$ et $\lambda_2 I_3 - M$.

d. En déduire que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(\lambda_1 \text{Id} - f)$ et $\text{Ker}(\lambda_2 \text{Id} - f)$ sont de dimension 1. Justifier qu'ils sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans E ?

e. Chercher, si c'est possible, un vecteur de $\text{Ker}(\lambda_1 \text{Id} - f)$ sous la forme

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \star \\ \star \end{pmatrix}.$$

f. Chercher, si c'est possible, un vecteur de $\text{Ker}(\lambda_2 \text{Id} - f)$ sous la forme

$$b_2 = \begin{pmatrix} \star \\ 1 \\ \star \end{pmatrix}.$$

3. a. Montrer qu'il existe une infinité de vecteurs b_3 vérifiant $f(b_3) = b_2 + 2b_3$: donner une description paramétrique de ces vecteurs.
b. Montrer que, parmi ces vecteurs, il y en a un, et un seul, de la forme

$$b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ \star \\ \star \end{pmatrix}.$$

Dans toute la suite, b_3 désigne ce vecteur particulier.

c. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de E .

4. On note T la matrice de l'endomorphisme f relativement à la base $\mathcal{B}$, c'est-dire que $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

a. Montrer que T est une matrice triangulaire supérieure.

b. Dans toute la suite, on note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$. Donner l'expression de Q .

c. Justifier que la matrice Q est inversible et calculer son inverse.

d. Donner la relation liant les matrices M, T, Q et Q^{-1} .

5. a. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe un réel α_n tel que

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

et exprimer α_n en fonction de n .

b. Donner la relation de récurrence satisfaite par la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$.

6. Dédurre, de ce qui précède l'expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a. On a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. On a

$$\text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3,$$

où l'on effectue successivement les opérations

$$L_3 \leftarrow \frac{L_3 + L_1}{2}, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2.$$

Ainsi, f est un isomorphisme.

2. a. On calcule le polynôme caractéristique :

$$P(x) = \det(M - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 0 & 2-x & 1 \\ -1 & 2 & 2-x \end{vmatrix}.$$

En effectuant l'opération

$$L_1 \leftarrow L_1 + (1-x)L_3,$$

on obtient

$$P(x) = -(2-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-x)^2(1-x).$$

- b. La matrice $M - \lambda I$ n'est pas de rang 3 si et seulement si son déterminant est nul, c'est-à-dire si λ est une racine de P .

Les deux réels pour lesquels $M - \lambda I$ n'est pas de rang 3 sont donc

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

- c. Un calcul donne

$$\text{rg}(M - I) = \text{rg}(M - 2I) = 2.$$

- d. Les noyaux $\ker(f - \text{Id})$ et $\ker(f - 2\text{Id})$ sont chacun de dimension 1 d'après le théorème du rang.

Ils ne peuvent pas être supplémentaires puisque

$$1 + 1 = 2 < \dim(\mathbb{R}^3) = 3.$$

En revanche, si

$$u \in \ker(f - \text{Id}) \cap \ker(f - 2\text{Id}),$$

alors

$$f(u) = u \quad \text{et} \quad f(u) = 2u,$$

donc $u = 2u$, puis $u = 0$.

Ainsi ces deux noyaux sont en somme directe, mais ne sont pas supplémentaires.

- e. Puisque dans $M - I$ la dernière colonne est la somme des deux premières et que son noyau est de dimension 1,

$$\ker(f - \text{Id}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

On pose donc $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- f. De même, puisque dans $M - 2I$ la somme du double de la première colonne et de la seconde colonne est nulle et que son noyau est de dimension 1,

$$\ker(f - 2\text{Id}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

et l'on pose $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. a. Si

$$f(b_3) = b_2 + 2b_3,$$

alors

$$(f - 2\text{Id})(b_3) = b_2,$$

et donc

$$(f - 2\text{Id})^2(b_3) = 0.$$

La matrice de $f - 2\text{Id}$ dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

dont le noyau est

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(b_2, e_3).$$

Ainsi il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$b_3 = ab_2 + be_3.$$

Alors

$$(f - 2\text{Id})(b_3) = a(f - 2\text{Id})(b_2) + b(f - 2\text{Id})(e_3) = b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On doit donc avoir $b = 1$, d'où

$$b_3 = ab_2 + e_3, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, tout vecteur de cette forme vérifie bien

$$f(b_3) = b_2 + 2b_3.$$

Ainsi

$$\{b_3 \in \mathbb{R}^3 \mid f(b_3) = b_2 + 2b_3\} = \{ab_2 + e_3, a \in \mathbb{R}\}.$$

b. Si

$$b_3 = ab_2 + e_3,$$

alors

$$b_3 = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le seul vecteur b_3 dont la première coordonnée vaut 2 est donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. On calcule facilement $\text{rg Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = 3$, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. a. On obtient

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

qui est bien triangulaire supérieure.

b. On a

$$Q = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. La matrice Q est inversible et

$$Q^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

d. On a

$$M = QTQ^{-1}.$$

5. a. On écrit

$$T = D + N,$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $DN = ND$ et que $N^2 = 0$.

Par la formule du binôme,

$$T^n = (D + N)^n = D^n + nD^{n-1}N.$$

Or

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, \quad D^{n-1}N = 2^{n-1}N.$$

Ainsi

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, \quad \alpha_n = n2^{n-1}.$$

b. On a $\alpha_0 = 0$ puisque $T^0 = I_3$.

Comme

$$T^{n+1} = T^n T,$$

on obtient, par identification,

$$\alpha_{n+1} = 2^n + 2\alpha_n.$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = QT^nQ^{-1},$$

ce qui permet d'obtenir après calcul :

$$M = \begin{pmatrix} -1 + 2^n(2-n) & 2 + (n-1)2^{n+1} & n2^n \\ -1 + 2^n(2-n) & 2 + (n-1)2^n & n2^n \\ 1 - 2^n & -2 + 2^{n+1} & 2^n \end{pmatrix}.$$