DS 8 – Concours blanc

12.05.2026 – 4h

- *Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.*
- *Il est rappelé que :*
  - ⋆ *toute affirmation doit être rigoureusement justifiée,*
  - ⋆ *tout résultat obtenu doit être mis en valeur (encadré ou souligné).*
- *La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.*
- *Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

⋆ ⋆ ⋆

Problème 1 – ALGÈBRE

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par $\mathbb{R}_2[X]$ le sous espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$.

Partie I – Changement de bases et division euclidienne

1. Etant donné trois réels deux à deux distincts a_1, a_2 et a_3, on considère trois polynômes Q_1, Q_2, Q_3 de $\mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$,
$$\begin{cases} Q_i\left(a_j\right) = 0 \text{ si } i \neq j \\ Q_i\left(a_i\right) \neq 0 \end{cases}$$
Montrer que (Q_1, Q_2, Q_3) est une famille libre.
2. On pose :
$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{8}(X-3)(X-5) \\ P_2 = \frac{-1}{4}(X-1)(X-5) \\ P_3 = \frac{1}{8}(X-1)(X-3) \end{cases}$$
Calculer $P_i(1), P_i(3)$ et $P_i(5)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
3. En déduire que $\mathscr{P} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer la matrice A de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{P}$.
5. On pose $B = 8A$.
   a. Déterminer $\det(B)$, et justifier que A et B sont inversibles.
   b. En déduire B^{-1} après avoir exprimé la comatrice de B, puis A^{-1}.

On pose $P_0 = (X-1)(X-3)(X-5)$. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on note $\widehat{P}$ le reste de la division euclidienne de P par P_0 et on considère l'application :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \widehat{P} \end{array}$$

6. Montrer que f est linéaire.
7. Déterminer l'image de f.

8. Déterminer le noyau de f.
9. Comparer les endomorphismes f^2 et f. Reconnaître f et en donner les éléments caractéristiques.
10. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,
$$\widehat{P} = P(1)P_1 + P(3)P_2 + P(5)P_3.$$
11. Retrouver ainsi la matrice inverse de A. Reconnaître la matrice A^{-1}, et en déduire son déterminant sans calcul.

Partie II – Calcul matriciel

On pose :
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Calculer le produit $(M - I)(M - 3I)(M - 5I)$, et justifier sans calcul que les facteurs de ce produit commutent deux à deux.
13. On note
$$E = \{aI + bM + cM^2,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$
Justifier que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
14. Déterminer la dimension de E.

Dans la suite de ce problème, pour tout polynôme $P = a + bX + cX^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, on pose :
$$P(M) = aI + bM + cM^2.$$
On considère par ailleurs l'application
$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & E \\ P & \mapsto & P(M) \end{array}$$

15. Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
16. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose $B_i = P_i(M)$.
    a. En utilisant les questions 10 et 15, exprimer I, M et M^2 sous forme de combinaison linéaire de B_1, B_2 et B_3.
    b. Soit $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ tel que $i \neq j$. Déduire de la question 12 le produit B_iB_j.

Problème 2 – ANALYSE

Dans tout le problème, φ désigne une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose par ailleurs que :

- $\varphi(x) > 0$ pour tout réel x sauf éventuellement en un nombre fini de réels où φ s'annule,
- $\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, où $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Le but de ce problème est d'étudier, lorsqu'elle est bien définie, la fonction f telle que pour tout x réel, $f(x)$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue y :
$$\int_x^y \varphi(t)\,\mathrm{d}t \ = \ 1 \qquad (E_x)$$

Partie I – Un exemple explicite

Dans cette partie seulement, on pose $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^t$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation (E_x) d'inconnue y possède une unique solution donnée par
$$f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x).$$
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude.
3. *a.* Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f au voisinage de $+\infty$.

   b. Préciser le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$, ainsi que la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote.

4. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0 .
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé, en utilisant les résultats des questions précédentes.

Partie II – Existence de f dans le cas $\ell \neq 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, on pose

$$\Phi_x : u \mapsto \int_x^u \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

de sorte que l'équation (E_x) d'inconnue y se récrit :

$$\Phi_x(y) \;=\; 1 \qquad (E_x)$$

6. *Dans cette question seulement*, φ est définie par $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\pi\,(1+t^2)}$.
   a. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
   $$\int_x^y \varphi(t)\,\mathrm{d}t < 1.$$
   b. En déduire que pour tout x réel, l'équation (E_x) n'a pas de solution. Que vaut ℓ dans ce cas ?

Dans tout le reste de ce problème, on suppose que $\ell \neq 0$.

7. On fixe $x \in \mathbb{R}$.
   a. Justifier que Φ_x est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée φ, puis qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en conclure sur l'équation (E_x) ?
   b. Rappeler la définition quantifiée de $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ dans les cas $\ell > 0$ et $\ell = +\infty$.
   En déduire qu'il existe des réels x_0 et $A > 0$ tels que pour tout réel $t \geqslant x_0$, on a $\varphi(t) \geqslant A$.
   c. En déduire que $\Phi_x(u) \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   d. Déduire des questions précédentes que l'équation (E_x) possède une solution unique.

Partie III – Quelques propriétés de f

On reprend les notations de la partie II dont on pourra utiliser les résultats même s'ils n'ont pas été démontrés.

On rappelle que pour tout réel x, $f(x)$ désigne l'unique solution de l'équation (E_x), c'est-à-dire que

$$\int_x^{f(x)} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \;=\; 1,$$

et $\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f.

8. Montrer, en justifiant l'écriture, que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f(x) = \Phi_0^{-1}\left(\Phi_0(x) + 1\right).$$
9. En déduire que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
10. On suppose dans cette question que φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}.$$
11. On suppose dans cette question qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que :
   $$\begin{cases} \varphi(x_0) \neq 0 \\ \varphi(f(x_0)) = 0 \\ \forall y \in J \backslash \{f(x_0)\},\ \varphi(y) \neq 0, \end{cases}$$
   où $J =]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$.
   a. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que, en notant $I =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, on a
   $$\forall x \in I \backslash \{x_0\},\ f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}.$$

b. En déduire que f n'est pas dérivable en x_0 et que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède une tangente verticale au point d'abscisse x_0.

12. Dans cette question $\ell = +\infty$. Soit un réel $\varepsilon > 0$.

a. Justifier qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall t \geqslant a,\ \varphi(t) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

b. En déduire que pour tout $x \geqslant a$, $|f(x) - x| \leqslant \varepsilon$. Que dire de l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$?

13. Dans cette question, on suppose que $\ell \in \mathbb{R}_+^\star$. Étudier l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$, dont on donnera l'équation le cas échéant.

14. Dans cette question, on suppose φ paire, et on note $\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = f(x)\}$.

a. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x,y) \in \Gamma_f$ si et seulement si $(-y,-x) \in \Gamma_f$.

b. En déduire que $\mathscr{C}_f$ possède un axe de symétrie à déterminer.

⋆ ⋆ ⋆