

## DS 8 – Concours blanc

Corrigé

### Problème 1 – ALGÈBRE

On désigne par  $\mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par  $\mathbb{R}_2[X]$  le sous espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

On rappelle que la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  est  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ .

#### Partie I – Changement de bases et division euclidienne

1. Etant donné trois réels deux à deux distincts  $a_1, a_2$  et  $a_3$ , on considère trois polynômes  $Q_1, Q_2, Q_3$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que, pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ ,

$$\begin{cases} Q_i(a_j) = 0 & \text{si } i \neq j \\ Q_i(a_i) \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  est une famille libre.

2. On pose :

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{8}(X-3)(X-5) \\ P_2 = \frac{-1}{4}(X-1)(X-5) \\ P_3 = \frac{1}{8}(X-1)(X-3) \end{cases}$$

Calculer  $P_i(1), P_i(3)$  et  $P_i(5)$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

3. En déduire que  $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .  
 4. Déterminer la matrice  $A$  de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{P}$ .  
 5. On pose  $B = 8A$ .  
 a. Déterminer  $\det(B)$ , et justifier que  $A$  et  $B$  sont inversibles.  
 b. En déduire  $B^{-1}$  après avoir exprimé la comatrice de  $B$ , puis  $A^{-1}$ .

On pose  $P_0 = (X-1)(X-3)(X-5)$ . Pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$ , on note  $\hat{P}$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $P_0$  et on considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto \hat{P} \end{aligned}$$

6. Montrer que  $f$  est linéaire.  
 7. Déterminer l'image de  $f$ .  
 8. Déterminer le noyau de  $f$ .  
 9. Comparer les endomorphismes  $f^2$  et  $f$ . Reconnaître  $f$  et en donner les éléments caractéristiques.  
 10. Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,

$$\hat{P} = P(1)P_1 + P(3)P_2 + P(5)P_3.$$

11. Retrouver ainsi la matrice inverse de  $A$ . Reconnaître la matrice  $A^{-1}$ , et en déduire son déterminant sans calcul.

#### Partie II – Calcul matriciel

On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Calculer le produit  $(M - I)(M - 3I)(M - 5I)$ , et justifier sans calcul que les facteurs de ce produit commutent deux à deux.

13. On note

$$E = \{aI + bM + cM^2, a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Justifier que  $E$  est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

14. Déterminer la dimension de  $E$ .

Dans la suite de ce problème, pour tout polynôme  $P = a + bX + cX^2$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$P(M) = aI + bM + cM^2.$$

On considère par ailleurs l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow E \\ P &\mapsto P(M) \end{aligned}$$

15. Montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

16. Pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ , on pose  $B_i = P_i(M)$ .

a. En utilisant les questions 10 et 15, exprimer  $I, M$  et  $M^2$  sous forme de combinaison linéaire de  $B_1, B_2$  et  $B_3$ .

b. Soit  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$  tel que  $i \neq j$ . Dédurre de la question 12 le produit  $B_i B_j$ .

1. Supposons qu'il existe  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$  tels que  $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , en évaluant en  $a_i$  la relation précédente, on obtient  $\lambda_i Q_i(a_i) = 0$ . Comme  $Q_i(a_i) \neq 0$ , on a  $\lambda_i = 0$ , ce qui montre que la famille  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  est libre.

2. Un calcul élémentaire donne :

$$\begin{aligned} P_1(1) = 1, \quad P_1(3) = 0, \quad P_1(5) = 0, \\ P_2(1) = 0, \quad P_2(3) = 1, \quad P_2(5) = 0, \\ P_3(1) = 0, \quad P_3(3) = 0, \quad P_3(5) = 1. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, en posant  $a_1 = 1, a_2 = 3$  et  $a_3 = 5$  la famille  $(P_1, P_2, P_3)$  vérifie pour  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\begin{cases} P_i(a_j) = 0 & \text{si } i \neq j \\ P_i(a_i) \neq 0 \end{cases}$$

ainsi la famille  $(P_1, P_2, P_3)$  est libre.

Puisque cette famille libre comporte 3 vecteurs de  $\mathbb{R}_2[X]$  et que  $\mathbb{R}_2[X]$  est de dimension 3, la famille  $(P_1, P_2, P_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

4. Un calcul simple donne :

$$\begin{cases} P_1(X) = \frac{15}{8} - X + \frac{1}{8} X^2 \\ P_2(X) = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2} X - \frac{1}{4} X^2 \\ P_3(X) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} X + \frac{1}{8} X^2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

5. a. On a

$$|B| = |8A| = \begin{vmatrix} 15 & -10 & 3 \\ -8 & 12 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{C_2 \leftarrow C_2 - C_3} \begin{vmatrix} 12 & -4 & 1 \\ -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 32.$$

Comme  $\det B \neq 0$ , la matrice  $B$  est inversible, donc  $A = \frac{1}{8}B$  également. On peut aussi bien sûr remarquer que  $A$  est inversible comme matrice de passage.

b. On a

$$\text{Com } B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \\ 4 & 36 & 100 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a  $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \text{Com}(B)^\top = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 36 \\ 4 & 20 & 100 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$ . Ainsi

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{8}B\right)^{-1} = 8B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}.$$

6. Comme  $P_0 \neq 0$ , la division euclidienne d'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  par  $P_0$  existe : on peut écrire  $P = P_0Q + \hat{P}$  avec  $\deg \hat{P} < 3$ .

Pour tout couple  $(P_1, P_2)$  de polynômes et pour tout couple  $(\lambda_1, \lambda_2)$  de nombres réels, on peut écrire les divisions euclidiennes :

$$\begin{cases} P_1 = P_0Q_1 + \hat{P}_1 \\ P_2 = P_0Q_2 + \hat{P}_2 \end{cases}$$

où  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ . On sait que  $\deg \hat{P}_1 < 3$  et  $\deg \hat{P}_2 < 3$ . D'où

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) P_0 + (\lambda_1 \hat{P}_1 + \lambda_2 \hat{P}_2).$$

Or  $\deg(\lambda_1 \hat{P}_1(X) + \lambda_2 \hat{P}_2(X)) \leq \max(\deg(\hat{P}_1), \deg(\hat{P}_2)) < 3$ , ce qui montre que l'écriture ci-dessus est la division euclidienne de  $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$  par  $P_0$ . Ainsi,  $f(\lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(X)) = \lambda_1 \hat{P}_1(X) + \lambda_2 \hat{P}_2(X) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$ , ce qui prouve que l'application  $f$  est linéaire.

7. Montrons que  $\text{Im } f = \mathbb{R}_2[X]$ .

– Il est immédiat que  $\text{Im } f \subset \mathbb{R}_2[X]$ .

– Si  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , alors  $f(P) = P$  car  $P = P_0 \cdot 0 + P$  avec  $\deg P < 3$ , ce qui prouve que  $\mathbb{R}_2[X] \subset \text{Im } f$ .

8. Si  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on a

$$P \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = P_0Q.$$

Ainsi,  $\text{Ker } f = \{P_0Q, Q \in \mathbb{R}[X]\} = P_0 \mathbb{R}[X]$ .

9. Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , comme  $\deg \hat{P} < 3$  on a  $f(\hat{P}) = \hat{P}$ , soit  $f(f(P)) = P$ . Ainsi,  $f^2 = \text{id}$ , ce qui montre que  $f$  est un projecteur.

L'application  $f$  est donc la projection sur  $\text{Im } f = \mathbb{R}_2[X]$  parallèlement à  $\text{Ker } f = P_0 \mathbb{R}[X]$ .

10. Puisque  $\hat{P} \in \mathbb{R}_2[X]$ ,  $\hat{P}$  se décompose de manière unique sur la base  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  : il existe un unique triplet  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\hat{P} = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$ .

On en déduit que  $\hat{P}(1) = \lambda_1 P_1(1) = \lambda_1$  car  $P_2(1) = 0$  et  $P_3(1) = 0$ . De même, on a  $\hat{P}(3) = \lambda_2 P_2(3) = \lambda_2$  et  $\hat{P}(5) = \lambda_3 P_3(5) = \lambda_3$ .

En outre,  $P = P_0Q + \hat{P}$ . Comme  $P_0(1) = P_0(3) = P_0(5) = 0$ , on a  $P(1) = \hat{P}(1)$ ,  $P(3) = \hat{P}(3)$ ,  $P(5) = \hat{P}(5)$ . Donc

$$\hat{P} = P(1)P_1 + P(3)P_2 + P(5)P_3.$$

11. Puisque  $A$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{P}$ ,  $A^{-1}$  est la matrice de passage de  $\mathcal{P}$  à  $\mathcal{B}$ . On obtient donc l'inverse de  $A$  en décomposant  $1, X, X^2$  sur la base  $(P_1, P_2, P_3)$ .

En utilisant la relation précédente, on obtient, en donnant à  $P$  les valeurs  $1, X, X^2$  :

$$\begin{cases} 1 = P_1 + P_2 + P_3 \\ X = P_1 + 3P_2 + 5P_3 \\ X^2 = P_1 + 9P_2 + 25P_3 \end{cases} \quad \text{ce qui donne bien } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît une matrice de Vandermonde associée aux réels  $a_1, a_2, a_3$  donnés par  $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5$ . On sait alors que  $\det(A^{-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (a_j - a_i) = (3 - 1)(5 - 3)(5 - 1) = 16$ .

On note que ceci est conforme avec le résultat de la question 5b. En effet  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{|\frac{1}{8}B|} = \frac{1}{\frac{1}{8}|B|} = \frac{8^3}{32} = 16$ .

12. Un calcul simple prouve que  $(M - I)(M - 3I)(M - 5I) = 0$ . Comme  $MI = IM$ , le produit des autres facteurs obtenus par permutation sont égaux au produit précédent. Les différents produits sont donc tous nuls.

13. Par définition,  $E = \text{Vect}(I, M, M^2)$ , donc  $E$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $I, M, M^2$ .

14. Remarquons qu'on a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 0 \\ 12 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Supposons qu'il existe  $x, y, z \in \mathbb{R}$  tels que  $xI + yM + zM^2 = 0$ . Ainsi, on a le système :

$$\begin{cases} x + 3y + 13z = 0 \\ 2y + 12z = 0 \\ x + 3y + 9z = 0 \end{cases}$$

En retranchant la première équation à la dernière, il vient  $z = 0$ , puis  $y = 0$  et enfin  $x = 0$ . La famille  $(I, M, M^2)$  est donc libre.

Puisqu'elle est génératrice de  $E$ , c'est donc une base de  $E$ , et on a montré que  $\dim E = 3$ .

15. Soient  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  et  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ . On note  $P_1 = a_1 + b_1X + c_1X^2$  et  $P_2 = a_2 + b_2X + c_2X^2$ , où  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ .

On a :

$$(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) X + (\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2) X^2.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) I + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) M + (\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2) M^2 \\ &= \alpha_1 (a_1 I + b_1 M + c_1 M^2) + \alpha_2 (a_2 I + b_2 M + c_2 M^2). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\Phi(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \alpha_1 \Phi(P_1) + \alpha_2 \Phi(P_2)$ , ce qui montre que  $\Phi$  est linéaire.

Puisque  $\Phi$  transforme la base  $(1, X, X^2)$  en la base  $(I, M, M^2)$  de  $E$ , on sait que  $\Phi$  est bijective. Ainsi,  $\Phi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  sur  $E$ .

16. a. D'après la question 10., on a :

$$\begin{cases} 1 = P_1(X) + P_2(X) + P_3(X) \\ X = P_1(X) + 3P_2(X) + 5P_3(X) \\ X^2 = P_1(X) + 9P_2(X) + 25P_3(X) \end{cases}$$

Comme  $\Phi$  est un isomorphisme, on a

$$\begin{cases} \Phi(1) = \Phi(P_1) + \Phi(P_2) + \Phi(P_3) \\ \Phi(X) = \Phi(P_1) + 3\Phi(P_2) + 5\Phi(P_3) \\ \Phi(X^2) = \Phi(P_1) + 9\Phi(P_2) + 25\Phi(P_3) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} I = B_1 + B_2 + B_3 \\ M = B_1 + 3B_2 + 5B_3 \\ M^2 = B_1 + 9B_2 + 25B_3 \end{cases}$$

b. Par définition des  $B_i$ , on a :

$$\begin{cases} B_1 = P_1(M) = \frac{1}{8}(M - 3I)(M - 5I) \\ B_2 = P_2(M) = -\frac{1}{4}(M - I)(M - 5I) \\ B_3 = P_3(M) = \frac{1}{8}(M - I)(M - 3I) \end{cases}$$

D'après 15, on peut permuter les facteurs dans le produit  $(M - I)(M - 3I)(M - 5I)$ , donc on a :

$$B_1 B_2 = -\frac{1}{32}(M - I)(M - 3I)(M - 5I)(M - 5I) = 0(M - 5I) = 0$$

De même, on a immédiatement  $B_i B_j = 0$  pour tous  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  tels que  $i \neq j$ .

## Problème 2 – ANALYSE

Dans tout le problème,  $\varphi$  désigne une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose par ailleurs que :

- ◊  $\varphi(x) > 0$  pour tout réel  $x$  sauf éventuellement en un nombre fini de réels où  $\varphi$  s'annule,
- ◊  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ , où  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Le but de ce problème est d'étudier, lorsqu'elle est bien définie, la fonction  $f$  telle que pour tout  $x$  réel,  $f(x)$  est l'unique solution de l'équation d'inconnue  $y$  :

$$\int_x^y \varphi(t) dt = 1 \tag{E_x}$$

### Partie I – Un exemple explicite

Dans cette partie seulement, on pose  $\varphi : t \mapsto e^t$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'équation  $(E_x)$  d'inconnue  $y$  possède une unique solution donnée par

$$f(x) = \ln(1 + e^x).$$

2. Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de l'intervalle d'étude.
3. a. Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentant  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .  
b. Préciser le signe de la fonction  $x \mapsto f(x) - x$ , ainsi que la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à son asymptote.
4. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction  $f$  au voisinage de 0.
5. Tracer l'allure de la courbe  $\mathcal{C}_f$  dans un repère orthonormé, en utilisant les résultats des questions précédentes.

### Partie II – Existence de $f$ dans le cas $\ell \neq 0$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  fixé, on pose

$$\Phi_x : u \mapsto \int_x^u \varphi(t) dt$$

de sorte que l'équation  $(E_x)$  d'inconnue  $y$  se récrit :

$$\Phi_x(y) = 1 \tag{E_x}$$

6. Dans cette question seulement,  $\varphi$  est définie par  $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ .

a. Montrer que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_x^y \varphi(t) dt < 1.$$

b. En déduire que pour tout  $x$  réel, l'équation  $(E_x)$  n'a pas de solution. Que vaut  $\ell$  dans ce cas?

**Dans tout le reste de ce problème, on suppose que  $\ell \neq 0$ .**

7. On fixe  $x \in \mathbb{R}$ .

a. Justifier que  $\Phi_x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $\varphi$ , puis qu'elle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Que peut-on en conclure sur l'équation  $(E_x)$  ?

b. Rappeler la définition quantifiée de  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$  dans les cas  $\ell > 0$  et  $\ell = +\infty$ .

En déduire qu'il existe des réels  $x_0$  et  $A > 0$  tels que pour tout réel  $t \geq x_0$ , on a  $\varphi(t) \geq A$ .

c. En déduire que  $\Phi_x(u) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} +\infty$ .

d. Déduire des questions précédentes que l'équation  $(E_x)$  possède une solution unique.

**Partie III – Quelques propriétés de  $f$**

On reprend les notations de la partie II dont on pourra utiliser les résultats même s'ils n'ont pas été démontrés.

On rappelle que pour tout réel  $x$ ,  $f(x)$  désigne l'unique solution de l'équation  $(E_x)$ , c'est-à-dire que

$$\int_x^{f(x)} \varphi(t) dt = 1,$$

et  $\mathcal{C}_f$  désigne la courbe représentative de la fonction  $f$ .

8. Montrer, en justifiant l'écriture, que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1).$$

9. En déduire que  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

10. On suppose dans cette question que  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}.$$

11. On suppose dans cette question qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$  tels que :

$$\begin{cases} \varphi(x_0) \neq 0 \\ \varphi(f(x_0)) = 0 \\ \forall y \in J \setminus \{f(x_0)\}, \varphi(y) \neq 0, \end{cases}$$

où  $J = ]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ .

a. Montrer qu'il existe  $\eta > 0$  tel que, en notant  $I = ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ , on a

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}.$$

b. En déduire que  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$  et que la courbe  $\mathcal{C}_f$  possède une tangente verticale au point d'abscisse  $x_0$ .

12. Dans cette question  $\ell = +\infty$ . Soit un réel  $\varepsilon > 0$ .

a. Justifier qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall t \geq a, \varphi(t) \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

b. En déduire que pour tout  $x \geq a, |f(x) - x| \leq \varepsilon$ . Que dire de l'allure de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$  ?

13. Dans cette question, on suppose que  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ . Étudier l'existence d'une asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ , dont on donnera l'équation le cas échéant.

14. Dans cette question, on suppose  $\varphi$  paire, et on note  $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = f(x)\}$ .

a. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que  $(x, y) \in \Gamma_f$  si et seulement si  $(-y, -x) \in \Gamma_f$ .

b. En déduire que  $\mathcal{C}_f$  possède un axe de symétrie à déterminer.

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_x^y e^t dt = 1 \Leftrightarrow e^y - e^x = 1 \Leftrightarrow y = \ln(1 + e^x).$$

Ainsi, dans le cas présent,  $(E_x)$  a pour unique solution  $y = \ln(1 + e^x)$ .

2. La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  comme composée des fonctions

◊  $x \mapsto 1 + e^x$ , qui est définie et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ ,

◊  $x \mapsto \ln(x)$  qui est définie et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Par composition de limite, on a  $f(x) = \ln(1 + e^x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ .

3. a. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x) = \ln(1 + e^x) = \ln(e^x(e^{-x} + 1)) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x} + 1) = x + \ln(e^{-x} + 1)$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{-x} + 1) = 0$ , la droite d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

b. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x}) > 0$ , donc la courbe  $\mathcal{C}_f$  se situe au-dessus de son asymptote en  $+\infty$ .

4. On a tout d'abord

$$f(x) = \ln\left(2 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right).$$

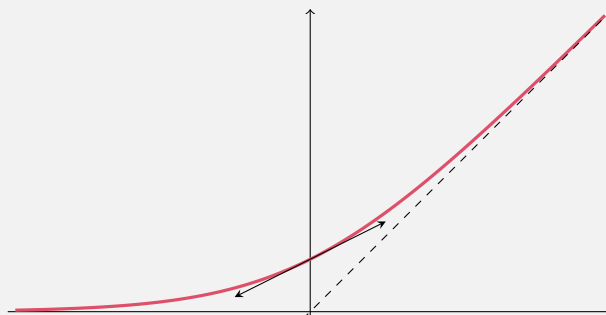
On utilise ensuite le développement limité  $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ . On obtient :

$$f(x) = \ln 2 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Ainsi, la droite d'équation  $y = \frac{x}{2} + \ln 2$  est tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.

Par ailleurs, comme  $f(x) - \ln 2 - \frac{x}{2} = \frac{x^2}{8} \geq 0$ , on en déduit que  $\mathcal{C}_f$  est localement au-dessus de sa tangente en 0.

5. Grâce aux questions précédentes, on obtient le graphique suivant :



6. a. Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_x^y \varphi(t) dt = \int_x^y \frac{1}{\pi(1+t^2)} = \frac{1}{\pi} [\arctan t]_x^y = \frac{1}{\pi} (\arctan x - \arctan y) < \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) < 1$$

car  $\arctan$  est à valeurs dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

b. On fixe  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la question précédente, il n'existe pas de réel  $y$  tel que  $\int_x^y \varphi(t) dt = 1$ , donc  $(E_x)$  n'a pas de solution.

Par ailleurs, on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi(1+t^2)} = 0$ , donc  $\ell = 0$ .

7. a. Par le théorème fondamental de l'analyse, comme  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $\Phi_x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $\varphi$ . Comme  $\Phi'_x = \varphi$  est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, on sait que  $\Phi_x$  est strictement croissante.

Ainsi, comme  $\Phi_x$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , l'équation  $(E_x)$  admet au plus une solution sur  $\mathbb{R}$ .

b. – Cas  $\ell = +\infty$  : on a  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall t \geq x_0, \varphi(t) \geq A$ .

On peut par exemple choisir  $A = 1$  et on a ainsi démontré l'existence de  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $A > 0$  tels que pour tout  $t \geq x_0, \varphi(t) \geq A$ .

– Cas  $\ell > 0$  : on a  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall t \geq x_0, |\varphi(t) - \ell| \leq \varepsilon$ .

On choisit  $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ , on a alors l'existence de  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $t \geq x_0$ , on a  $|\varphi(t) - \ell| \leq \frac{\ell}{2}$ , ce qui entraîne  $\varphi(t) - \ell \geq -\frac{\ell}{2}$ , ou encore  $\varphi(t) \geq \frac{\ell}{2}$ .

On a donc bien montré que pour  $A = \frac{\ell}{2}$  et  $x_0$  le réel ci-dessus, on a  $\varphi(t) \geq A$  pour tout  $t \geq x_0$ .

c. Pour tout réel  $u$  tel que  $u \geq x$  et  $u \geq x_0$ , on a

$$\Phi_x(u) = \int_x^u \varphi(t) dt = \int_x^{x_0} \varphi(t) dt + \int_{x_0}^u \varphi(t) dt \geq \Phi_x(x_0) + \int_{x_0}^u A dt$$

car pour tout  $t \in [x_0, u]$ , on a  $\varphi(t) \geq A$ . Ainsi, pour tout  $u \geq \max(x, x_0)$ , on a  $\Phi_x(u) \geq \Phi_x(x_0) + A(u - x_0)$ .

Comme  $A > 0$ , on a  $A(u - x_0) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} +\infty$ , donc par comparaison  $\Phi_x(u) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} +\infty$ .

d. Comme

– la fonction  $\Phi_x$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,

–  $\Phi_x(x) = 0$  et  $\Phi_x(u) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} +\infty$ ,

le théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation  $\Phi_x(y) = 1$  admet une solution dans  $]x, +\infty[$ . On a vu d'autre part que cette équation a au plus une solution. On a donc bien montré que  $(E_x)$  admet une unique solution.

8. Nous avons vu que la fonction  $\Phi_0$  est strictement croissante et continue sur  $\mathbb{R}$ , le théorème de la bijection assure donc qu'elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur son image. Par la relation de Chasles,

$$\int_x^{f(x)} \varphi(t) dt = \int_0^{f(x)} \varphi(t) dt - \int_0^x \varphi(t) dt = \Phi_0(f(x)) - \Phi_0(x)$$

donc  $\Phi_0(f(x)) - \Phi_0(x) = 1$ , c'est-à-dire  $\Phi_0(f(x)) = \Phi_0(x) + 1$ . On en déduit que  $f(x) = \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1)$ .

9. Nous avons vu en 7a que la fonction  $\Phi_0$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi, la fonction  $\Phi_0^{-1}$  est également continue et strictement croissante sur l'intervalle  $\Phi_0(\mathbb{R})$ . Par composition de telles fonctions, la fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

10. La fonction  $\Phi_0$  a pour dérivée  $\varphi$  qui est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\Phi_0$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Par ailleurs, comme  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , le théorème de dérivation d'une réciproque assure que  $\Phi_0^{-1}$  est dérivable sur son intervalle de définition. Par composition de fonctions dérivables, la fonction  $f : x \mapsto \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1)$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Par ailleurs, comme on a  $\Phi_0(f(x)) = \Phi_0(x) + 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on obtient en dérivant que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x)\Phi'_0(f(x)) = \Phi'_0(x), \quad \text{c'est-à-dire} \quad f'(x)\varphi(f(x)) = \varphi(x), \quad \text{d'où} \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}.$$

Comme on sait que les fonctions  $\varphi$  et  $f$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f'$  l'est aussi, et on a bien montré que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

11. a. On note d'abord qu'on sait que  $\Phi_0^{-1}$  est dérivable en  $\Phi_0(x) + 1$  si  $\Phi'_0(\Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1)) \neq 0$ , c'est-à-dire si  $\varphi(f(x)) \neq 0$ .

Par ailleurs, par continuité de  $f$  en  $x_0$ , on sait qu'il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in I = ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ , on a  $f(x) \in J = ]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ .

Comme  $f$  est strictement croissante, si  $x \in I \setminus \{x_0\}$ , on a  $f(x) \neq f(x_0)$ . Finalement, on a  $f(x) \in J \setminus \{f(x_0)\}$ , ce qui entraîne que  $\varphi(f(x)) \neq 0$ . D'après ce qui précède,  $\Phi_0^{-1}$  est donc dérivable en  $\Phi_0(x) + 1$ , et par composition  $f$  est dérivable en  $x$ .

On peut alors reconduire le calcul de la question précédente, et on a bien obtenu

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}.$$

b. Par continuité de  $\varphi$ , on a  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \varphi(x_0) > 0$ . Par ailleurs, comme  $\varphi \circ f$  est continue et  $\varphi$  est positive, on a  $\varphi(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0^+$ . Ainsi,

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet donc une tangente verticale en  $x_0$ .

12. a. On a  $\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ , donc par définition, on peut trouver un réel  $a$  tel que pour tout  $t \geq a$ ,  $\varphi(t) \geq \frac{1}{\varepsilon}$ .

b. Soit  $x \geq a$ . Comme  $\Phi_x(x) = 0$  et  $\Phi_x(f(x)) = 1$ , on a  $x < f(x)$  par stricte croissance de  $\Phi_x$ . Par ailleurs, comme  $x \geq a$ , on a  $\varphi(t) \geq \frac{1}{\varepsilon}$  pour tout  $t \in [x, f(x)]$ , donc par croissance de l'intégrale :

$$1 = \int_x^{f(x)} \varphi(t) dt \geq \int_x^{f(x)} \frac{1}{\varepsilon} dt = \frac{1}{\varepsilon}(f(x) - x),$$

ce qui montre que  $f(x) - x \leq \varepsilon$ , et même  $|f(x) - x| = f(x) - x \leq \varepsilon$  car on a vu que  $f(x) > x$ .

On a ainsi montré :  $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}, x \geq a \Rightarrow |f(x) - x| \leq \varepsilon$ , c'est-à-dire que  $f(x) - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

En d'autres termes, la courbe  $\mathcal{C}_f$  a pour asymptote au voisinage de  $+\infty$  la droite d'équation  $y = x$ .

13. Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\varphi(t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ , il existe :   
 ◊  $a \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $t \geq a$ , on a  $\varphi(t) \geq \frac{\ell}{2}$ ,   
 ◊  $b \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $t \geq b$ , on a  $|\varphi(t) - \ell| \leq \varepsilon \frac{\ell}{2}$ .

- Si  $x \geq a$ , alors  $1 = \int_x^{f(x)} \varphi(t) dx \geq \int_x^{f(x)} \frac{\ell}{2} dt = (f(x) - x) \frac{\ell}{2}$ , donc  $f(x) - x \leq \frac{2}{\ell}$ .

- Si  $x \geq \max(a, b)$ , on a

$$|1 - \ell(f(x) - x)| = \left| \int_x^{f(x)} \varphi(t) dt - \int_x^{f(x)} \ell dt \right| = \left| \int_x^{f(x)} (\varphi(t) - \ell) dt \right| \leq \int_x^{f(x)} |\varphi(t) - \ell| dt \leq \int_x^{f(x)} \varepsilon \frac{\ell}{2} dt.$$

Par conséquent,  $|1 - \ell(f(x) - x)| \leq \varepsilon \frac{\ell}{2}(f(x) - x) \leq \varepsilon$ .

Ceci démontre que  $\ell(f(x) - x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ , donc  $f(x) - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell}$ , puis  $f(x) - (x + \frac{1}{\ell}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Finalement, la droite d'équation  $y = x + \frac{1}{\ell}$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

14. a. Soit  $(x, y) \in \Gamma_f$ . On a alors en faisant le changement de variable  $s = -t$ , comme  $y = f(x)$ ,

$$\int_{-y}^{-x} \varphi(t) dt = \int_y^x \underbrace{\varphi(-s)}_{=\varphi(s)} (-dt) = - \int_y^x \varphi(s) ds = \int_x^y \varphi(s) ds = 1.$$

Ainsi, on a montré que  $-x = f(-y)$ , c'est-à-dire que  $(-y, -x) \in \Gamma_f$ . En appliquant ceci en remplaçant  $x$  par  $-y$  et  $y$  par  $-x$ , on obtient la réciproque.

b. On déduit de la question précédente que la droite d'équation  $y = -x$  est un axe de symétrie de  $\mathcal{C}_f$ .