

## DS 7 – Version 2

21.03.2026 – 3h

- Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.
- Il est rappelé que :
  - ★ toute affirmation doit être rigoureusement justifiée,
  - ★ tout résultat obtenu doit être mis en valeur (encadré ou souligné).
- La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

★ ★ ★

### Exercice 1 – Endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace-vectoriel réel et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- ◇ On dit qu'un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est *cyclique* s'il existe  $a \in E$  tel que la famille  $E = \text{Vect}(f^k(a))_{k \in \mathbb{N}}$ . Dans ce cas, on dit que  $a$  est *associé* à  $f$ .
- ◇ Pour tout endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on introduit les notations :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(f) &= \{g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = f \circ g\} \quad \text{l'ensemble des endomorphismes commutant avec } f, \\ \mathcal{P}(f) &= \{\alpha_0 \text{Id}_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_k f^k, k \in \mathbb{N}, (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}\}.\end{aligned}$$

Dans toute la suite,  $f$  désigne un endomorphisme de  $E$ .

#### Partie I – Questions préliminaires

1. Montrer que  $\mathcal{C}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ , contenant  $\text{Id}_E$  et stable par composition.
2. Soit  $g \in \mathcal{C}(f)$ , montrer que  $\mathcal{P}(g) \subset \mathcal{C}(f)$ .

#### Partie II – Étude générale en dimension finie

On suppose dans cette partie que  $E$  est de dimension finie, égale à  $n$ , que  $f$  est cyclique et l'on considère  $a \in E$  associé à  $f$ .

3. Justifier l'existence d'un plus grand entier  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$  soit une famille libre.
4. Montrer que  $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$  est une base de  $E$ . En déduire la valeur de  $p$ .
5. Soient  $g \in \mathcal{C}(f)$  et  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$  tels que  $g(a) = \alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$ . On note

$$h = \alpha_0 \text{Id}_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}.$$

Montrer que  $g = h$ .

6. En déduire que  $\mathcal{C}(f) = \mathcal{P}(f)$ .
7. Montrer que  $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$  est une base de  $\mathcal{P}(f)$ .

#### Partie III – Cas particulier : dérivations discrète et formelle en dimension finie

Dans cette partie, on suppose que  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et on fixe  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . On considère les endomorphismes  $D$  et  $\Delta$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  définis par

$$D : P \mapsto P' \quad \text{et} \quad \Delta : P \mapsto P(X + \alpha) - P(X).$$

8. Montrer que si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  n'est pas constant, alors  $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ .
9. En déduire que  $\Delta$  est cyclique. Quels sont les polynômes associés à  $\Delta$  ?
10. Montrer que  $D \in \mathcal{P}(\Delta)$ .
11. Montrer que  $D$  est cyclique.
12. Montrer que  $\mathcal{C}(D) = \mathcal{C}(\Delta)$ .

#### Partie IV – Dérivations discrète et formelle en dimension infinie

Dans cette partie,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et on considère toujours les applications

$$D : P \mapsto P' \quad \text{et} \quad \Delta : P \mapsto P(X + \alpha) - P(X),$$

que l'on voit cette fois comme des endomorphismes de  $\mathbb{R}[X]$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{C}(\Delta)$ .

13. Soient  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $P \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \Delta^{n+1}(P) = 0$ .
14. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $\varphi$ .
15. Montrer alors que, pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\varphi(P') = [\varphi(P)]'$ .
16. Montrer que  $\mathcal{C}(\Delta) = \mathcal{C}(D)$ .
17. Montrer que  $\Delta$  n'appartient pas à  $\mathcal{P}(D)$ .

#### Exercice 2 – Résolution d'une équation fonctionnelle

L'objet de ce problème est de résoudre dans certains cas l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = g(x) \quad (\mathcal{E})$$

où  $f$  est une fonction inconnue supposée continue sur  $\mathbb{R}$  et  $g$  une fonction donnée définie sur  $\mathbb{R}$ .

On pourra utiliser le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle  $y'' - y = 0$ , d'inconnue  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivables sont exactement les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x}, \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

#### Partie I – Cas où $g$ est deux fois dérivable

Dans cette partie on suppose que la fonction  $g$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que les fonctions  $f$  solutions de  $(\mathcal{E})$  sont elles aussi deux fois dérivables et qu'elles vérifient l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - f(x) = g''(x). \quad (\mathcal{F})$$

2. En déduire la solution de l'équation  $(\mathcal{E})$  lorsque  $g$  est une fonction polynomiale de degré au plus 1. On explicitera notamment le cas où la fonction  $g$  est nulle.
3. En déduire que l'équation  $(\mathcal{E})$  a au plus une solution.
4. Vérifier que la fonction

$$f_0 : x \mapsto \frac{e^x}{2} \int_0^x e^{-t} g''(t) dt - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x e^t g''(t) dt$$

est solution de  $(\mathcal{F})$ , puis montrer que les solutions de  $(\mathcal{F})$  sont les fonctions de la forme  $f : x \mapsto f_0 + \alpha e^x + \beta e^{-x}$ , avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

5. Montrer que si la fonction  $f$  écrite ci-dessus vérifie les relations :

$$f(0) = g(0) \quad \text{et} \quad f'(0) = g'(0).$$

alors  $f$  est solution de  $(\mathcal{E})$ .

6. Expliciter la solution  $f$  de  $(\mathcal{E})$  lorsque  $g : x \mapsto e^x$ .

## Partie II – Cas où $g$ est seulement continue

Dans cette partie, on suppose que la fonction  $g$  est seulement continue. On note  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

7. Le résultat d'unicité de la question 3 est-il encore valable ?
8. On définit l'application  $A$  qui à une fonction  $f$  de  $E$  associe la fonction notée  $A(f)$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

Montrer que  $A$  définit un endomorphisme injectif de  $E$ .

9. Pour tout  $f \in E$ , montrer que  $A(f)$  est deux fois dérivable et donner l'expression de  $A(f)''$ .

On rappelle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $A^n = \underbrace{A \circ \dots \circ A}_{n \text{ fois}}$  : si  $f \in E$ ,  $A^0(f) = f$ ,  $A^1(f) = A(f)$ ,  $A^2(f) = A(A(f))$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$A^n(f) = A(A^{n-1}(f)).$$

10. Montrer que si  $f \in E$ , alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A^2(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} f(t) dt.$$

11. En généralisant le résultat précédent et en justifiant, donner l'expression de  $A^n(f)$  pour  $f \in E$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$U_n = A + A^2 + \dots + A^n = \sum_{k=1}^n A^k.$$

Soit par ailleurs l'application  $U : E \rightarrow E$  qui à toute fonction  $f \in E$  associe la fonction  $U(f)$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(f)(x) = \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)f(t) dt.$$

12. Montrer que pour tout  $u \in \mathbb{R}$  on a :

$$\left| \operatorname{sh}(u) - \sum_{k=1}^n \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| \leq \operatorname{ch}(u) \frac{|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

13. En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \operatorname{ch}(x) \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \int_0^x |f(t)| dt \right|.$$

14. Montrer que  $U \circ A = A \circ U = U - A$ .

15. On note  $I : f \mapsto f$  l'application identité de  $E$  dans  $E$ .

- a. Montrer que les applications  $I - A$  et  $I + U$  sont des bijections de  $E$  dans  $E$ , réciproques l'une de l'autre.
- b. En déduire l'unique fonction  $f \in E$  solution de l'équation  $(\mathcal{E})$ .

★ ★ ★