

DS 7 – Version 2

Corrigé

Exercice 1 – Endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace-vectoriel réel et $n \in \mathbb{N}^*$.

- ◊ On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est *cyclique* s'il existe $a \in E$ tel que la famille $E = \text{Vect}(f^k(a))_{k \in \mathbb{N}}$. Dans ce cas, on dit que a est *associé* à f .
- ◊ Pour tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on introduit les notations :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(f) &= \{g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = f \circ g\} \text{ l'ensemble des endomorphismes commutant avec } f, \\ \mathcal{P}(f) &= \{\alpha_0 \text{Id}_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_k f^k, k \in \mathbb{N}, (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}\}.\end{aligned}$$

Dans toute la suite, f désigne un endomorphisme de E .

Partie I – Questions préliminaires

1. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$, contenant Id_E et stable par composition.
2. Soit $g \in \mathcal{C}(f)$, montrer que $\mathcal{P}(g) \subset \mathcal{C}(f)$.

Partie II – Étude générale en dimension finie

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie, égale à n , que f est cyclique et l'on considère $a \in E$ associé à f .

3. Justifier l'existence d'un plus grand entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ soit une famille libre.
4. Montrer que $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est une base de E . En déduire la valeur de p .
5. Soient $g \in \mathcal{C}(f)$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $g(a) = \alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$. On note

$$h = \alpha_0 \text{Id}_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}.$$

Montrer que $g = h$.

6. En déduire que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{P}(f)$.
7. Montrer que $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{P}(f)$.

Partie III – Cas particulier : dérivations discrète et formelle en dimension finie

Dans cette partie, on suppose que $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on fixe $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On considère les endomorphismes D et Δ de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par

$$D : P \mapsto P' \quad \text{et} \quad \Delta : P \mapsto P(X + \alpha) - P(X).$$

8. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ n'est pas constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.
9. En déduire que Δ est cyclique. Quels sont les polynômes associés à Δ ?
10. Montrer que $D \in \mathcal{P}(\Delta)$.
11. Montrer que D est cyclique.
12. Montrer que $\mathcal{C}(D) = \mathcal{C}(\Delta)$.

Partie IV – Dérivations discrète et formelle en dimension infinie

Dans cette partie, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et on considère toujours les applications

$$D : P \mapsto P' \quad \text{et} \quad \Delta : P \mapsto P(X + \alpha) - P(X),$$

que l'on voit cette fois comme des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\Delta)$.

13. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \Delta^{n+1}(P) = 0$.

14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ .

15. Montrer alors que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P') = [\varphi(P)]'$.

16. Montrer que $\mathcal{C}(\Delta) = \mathcal{C}(D)$.

17. Montrer que Δ n'appartient pas à $\mathcal{P}(D)$.

1. Soit $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $g \mapsto g \circ f - f \circ g$. Alors φ est linéaire, par linéarité de la composition, et $\mathcal{C}(f) = \text{Ker } \varphi$. Ainsi, $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

De plus, $\text{Id}_E \circ f - f \circ \text{Id}_E = f - f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $\text{Id}_E \in \mathcal{C}(f)$.

Enfin, si $g, h \in \mathcal{C}(f)$, alors

$$f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h = g \circ f \circ h = g \circ h \circ f$$

donc $g \circ h \in \mathcal{C}(f)$. Ainsi, $\mathcal{C}(f)$ est stable par composition.

2. Comme $g \in \mathcal{C}(f)$ et comme $\mathcal{C}(f)$ est stable par composition, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^k \in \mathcal{C}(f)$. Comme $\text{Id}_E \in \mathcal{C}(f)$, ceci s'étend à $k = 0$.

Par stabilité de $\mathcal{C}(f)$ par combinaisons linéaires, $\mathcal{P}(g) \subset \mathcal{C}(f)$.

3. Avec $p = 1$, la famille est (a) , qui est libre car a ne peut être nul (sinon, $E = \{0_E\}$, et $n = 0$). De plus, comme E est de dimension n , toute famille libre contient au plus n éléments. Ainsi, l'ensemble des entiers naturels p tels que $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est libre est non vide et majoré : il admet donc un plus grand élément. Il existe donc un plus grand entier p tel que $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est une famille libre.

4. Comme $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est libre mais $(a, f(a), \dots, f^p(a))$ ne l'est pas, on a $f^p(a) \in \text{Vect}(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$. Par une récurrence immédiate, pour tout $k \geq p$, $f^k(a) \in \text{Vect}(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$. Ainsi, $\text{Vect}(f^k(a), k \in \mathbb{N}) = \text{Vect}(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$. Par définition, $\text{Vect}(f^k(a), k \in \mathbb{N}) = E$, donc $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ engendre E . Ainsi, $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est une base de E .

Comme cette famille possède p éléments et que E est de dimension n , on a immédiatement $p = n$.

5. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Comme $f \in \mathcal{C}(g)$, on a $f^k \in \mathcal{C}(g)$, alors :

$$g(f^k(a)) = f^k(g(a)) = f^k \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(a) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^{k+i}(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(f^k(a)) = h(f^k(a)).$$

Ainsi, g et h coïncident sur la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$, donc coïncident sur E .

6. La question précédente montre l'inclusion $\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{P}(f)$.

Par ailleurs, il est clair que $f \in \mathcal{C}(f)$, donc d'après la question 2., $\mathcal{P}(f) \subset \mathcal{C}(f)$. Finalement, $\mathcal{C}(f) = \mathcal{P}(f)$.

7. D'après la question 5 et comme $\mathcal{C}(f) = \mathcal{P}(f)$, la famille $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ engendre $\mathcal{P}(f)$. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

Supposons que $\lambda_0 \text{Id}_E + \lambda_1 f + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$, avec $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$. Ainsi, en évaluant en a , on obtient $\lambda_0 a + \lambda_1 f(a) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0$. Par liberté de la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$, on a $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

8. Par linéarité de Δ , il suffit de le vérifier sur X^k pour chaque $0 \leq k \leq n$. Or, si $0 \leq k \leq n$, on a, par la formule du binôme de Newton,

$$(X + \alpha)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i \alpha^{k-i} = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \alpha^{k-i}$$

donc

$$\Delta(X^k) = (X + \alpha)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \alpha^{k-i}$$

est de degré $k-1$. Ainsi, si $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \mathbb{R}$, $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

9. On en déduit directement que, si P est de degré n , pour tout $0 \leq k \leq n$, alors $\deg(\Delta^k(P)) = n - k$. La famille $(P, \Delta(P), \dots, \Delta^n(P))$ est donc échelonnée en degrés. C'est donc une famille libre de $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$: elle engendre notamment $\mathbb{R}_n[X]$, donc Δ est cyclique.

On a vu que tout polynôme de degré n est associé à Δ . Réciproquement, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ n'est pas de degré n , alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(\Delta^k(P)) \leq \deg(P)$, donc X^n n'est pas engendré par la famille des $\Delta^k(P)$.

Ainsi, Δ est cyclique et les polynômes associés à Δ sont les polynômes de degré n .

10. D'après le résultat de la question 6, il suffit de montrer que $D \in \mathcal{C}(\Delta)$. Or, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors

$$D(\Delta(P)) = [P(X+a) - P]' = P'(X+a) - P' = \Delta(P') = \Delta(D(P)).$$

On a donc bien $D \circ \Delta = \Delta \circ D$, donc $D \in \mathcal{C}(\Delta)$.

11. Comme à la question 9, si P est de degré n , alors $D^k(P) = P^{(k)}$ est de degré $n - k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, donc la famille $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est échelonnée en degrés. C'est donc une famille libre de $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$: elle engendre notamment $\mathbb{R}_n[X]$, donc D est cyclique.
12. On a $D \in \mathcal{C}(\Delta)$, donc d'après les premières questions, tout polynôme en D commute avec Δ :

$$\mathcal{C}(D) = \mathcal{P}(D) \subset \mathcal{C}(\Delta).$$

Par symétrie, on a l'inclusion réciproque, donc $\mathcal{C}(D) = \mathcal{C}(\Delta)$.

13. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors, d'après la question 8, pour tout $0 \leq k \leq \deg P$, $\deg(\Delta^k(P)) \leq n - k$, donc $\Delta^n(P) \in \mathbb{R}$, donc $\Delta^{n+1}(P) = 0$.
- Réciproquement, si $\deg(P) \geq n + 1$, alors par le même raisonnement, $\deg(\Delta^{n+1}(P)) \geq 0$, donc $\Delta^{n+1}(P) \neq 0$.
- On a donc bien $P \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \Delta^{n+1}(P) = 0$.
14. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme φ commute avec Δ , φ commute avec Δ^{n+1} . Alors, d'après la question précédente,

$$\Delta^{n+1}(\varphi(P)) = \varphi(\Delta^{n+1}(P)) = \varphi(0) = 0.$$

On a donc bien $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ .

15. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $n = \deg(P)$. Alors, en considérant les restrictions de D et Δ à $\mathbb{R}_n[X]$ (on se place donc dans le cas de la partie précédente), comme φ commute avec Δ et comme $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ , alors $\varphi|_{\mathbb{R}_n[X]}$ commute avec $\Delta|_{\mathbb{R}_n[X]}$, donc avec $D|_{\mathbb{R}_n[X]}$, d'après le résultat de la question 12. Directement,

$$\varphi(P') = \varphi|_{\mathbb{R}_n[X]}(D|_{\mathbb{R}_n[X]}(P)) = D|_{\mathbb{R}_n[X]}(\varphi|_{\mathbb{R}_n[X]}(P)) = \varphi(P)'$$

16. La question précédente montre que $\mathcal{C}(\Delta) \subset \mathcal{C}(D)$.
- Il suffit de reprendre les trois questions précédentes en échangeant D et Δ pour obtenir l'inclusion réciproque. Ainsi, $\mathcal{C}(\Delta) = \mathcal{C}(D)$.
17. Supposons que $\Delta \in \mathcal{P}(D)$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\Delta = \alpha_0 \text{Id}_{\mathbb{R}[X]} + \alpha_1 D + \dots + \alpha_n D^n$$

Or $\Delta(X^{n+1}) = (X + \alpha)^{n+1} - X^{n+1}$ a pour terme constant $\alpha^{n+1} \neq 0$, tandis que

$$[\alpha_0 \text{Id}_{\mathbb{R}[X]} + \alpha_1 D + \dots + \alpha_n D^n](X^{n+1}) = \alpha_0 X^{n+1} + \alpha_1(n+1)X^n + \dots + \alpha_n(n+1)!X$$

a pour terme constant 0. Ces deux polynômes sont donc différents, c'est absurde. Ainsi, $\Delta \notin \mathcal{P}(D)$.

Exercice 2 – Résolution d'une équation fonctionnelle

L'objet de ce problème est de résoudre dans certains cas l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = g(x) \quad (\mathcal{E})$$

où f est une fonction inconnue supposée continue sur $\mathbb{R}$ et g une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$.

On pourra utiliser le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y'' - y = 0$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables sont exactement les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x}, \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Partie I – Cas où g est deux fois dérivable

Dans cette partie on suppose que la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les fonctions f solutions de $(\mathcal{E})$ sont elles aussi deux fois dérivables et qu'elles vérifient l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - f(x) = g''(x). \quad (\mathcal{F})$$

2. En déduire la solution de l'équation $(\mathcal{E})$ lorsque g est une fonction polynomiale de degré au plus 1. On explicitera notamment le cas où la fonction g est nulle.
3. En déduire que l'équation $(\mathcal{E})$ a au plus une solution.

4. Vérifier que la fonction

$$f_0 : x \mapsto \frac{e^x}{2} \int_0^x e^{-t} g''(t) dt - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x e^t g''(t) dt$$

est solution de $(\mathcal{F})$, puis montrer que les solutions de $(\mathcal{F})$ sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto f_0 + \alpha e^x + \beta e^{-x}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

5. Montrer que si la fonction f écrite ci-dessus vérifie les relations :

$$f(0) = g(0) \quad \text{et} \quad f'(0) = g'(0).$$

alors f est solution de $(\mathcal{E})$.

6. Expliciter la solution f de $(\mathcal{E})$ lorsque $g : x \mapsto e^x$.

Partie II – Cas où g est seulement continue

Dans cette partie, on suppose que la fonction g est seulement continue. On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

7. Le résultat d'unicité de la question 3 est-il encore valable ?
 8. On définit l'application A qui à une fonction f de E associe la fonction notée $A(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$$

Montrer que A définit un endomorphisme injectif de E .

9. Pour tout $f \in E$, montrer que $A(f)$ est deux fois dérivable et donner l'expression de $A(f)''$.

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A^n = \underbrace{A \circ \dots \circ A}_{n \text{ fois}}$: si $f \in E$, $A^0(f) = f$, $A^1(f) = A(f)$, $A^2(f) = A(A(f))$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n(f) = A(A^{n-1}(f)).$$

10. Montrer que si $f \in E$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A^2(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} f(t) dt.$$

11. En généralisant le résultat précédent et en justifiant, donner l'expression de $A^n(f)$ pour $f \in E$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = A + A^2 + \dots + A^n = \sum_{k=1}^n A^k.$$

Soit par ailleurs l'application $U : E \rightarrow E$ qui à toute fonction $f \in E$ associe la fonction $U(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(f)(x) = \int_0^x \text{sh}(x-t)f(t) dt.$$

12. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left| \text{sh}(u) - \sum_{k=1}^n \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| \leq \text{ch}(u) \frac{|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

13. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \text{ch}(x) \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \int_0^x |f(t)| dt \right|.$$

14. Montrer que $U \circ A = A \circ U = U - A$.

15. On note $I : f \mapsto f$ l'application identité de E dans E .

- a. Montrer que les applications $I - A$ et $I + U$ sont des bijections de E dans E , réciproques l'une de l'autre.
 b. En déduire l'unique fonction $f \in E$ solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ solution de $(\mathcal{E})$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt + g(x).$$

Comme les fonctions $x \mapsto x \int_0^x f(t) dt$, $x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$ et g sont dérivables, on en déduit que f l'est également par somme de fonctions dérivables. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \int_0^x f(t) dt - x f(x) + x f(x) + g'(x) = \int_0^x f(t) dt + g'(x).$$

Ainsi, f' est dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f(x) + g'(x)$, ce qui conclut.

2. On suppose que g est polynomiale de degré au plus 1, c'est-à-dire que g est de la forme $g : x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors g'' est la fonction nulle. Ainsi, si f est solution de $(\mathcal{E})$, alors f est solution de l'équation homogène $f'' - f = 0$. On en déduit que f est de la forme $f : x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a $f(0) = g(0) = b$ et $f'(0) = g'(0) = \alpha$, donc $\alpha + \beta = b$ et $\alpha - \beta = a$, donc $\alpha = \frac{a+b}{2}$ et $\beta = \frac{b-a}{2}$. Finalement,

$$f : x \mapsto a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x$$

Réciproquement, si f est la fonction ci-dessus, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, par intégrations par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)f(t) dt &= a \int_0^x (x-t) \operatorname{sh} t dt + b \int_0^x (x-t) \operatorname{ch} t dt \\ &= a \left([(x-t) \operatorname{ch} t]_0^x + \int_0^x \operatorname{ch} t dt \right) + b \left([(x-t) \operatorname{sh} t]_0^x + \int_0^x \operatorname{sh} t dt \right) \\ &= a(-x + \operatorname{sh} x) + b(\operatorname{ch} x - 1) = f(x) - g(x), \end{aligned}$$

donc f est bien solution de $(\mathcal{E})$, ce qui conclut.

En particulier, si g est nulle, f est nulle.

3. Soient f et $\tilde{f}$ deux solutions de $(\mathcal{E})$. Par linéarité, $f - \tilde{f}$ est également solution de $(\mathcal{E})$, avec un second membre nul. Mais nous avons vu que seule la fonction nulle est solution de cette équation, et ainsi $f - \tilde{f} = 0$.
4. On vérifie aisément que f_0 est solution de $(\mathcal{F})$, puis on observe que f est solution de $(\mathcal{F})$ si et seulement si $f - f_0$ est solution de l'équation homogène $f'' = f$.

Ainsi, f est solution de $(\mathcal{F})$ si et seulement si $f - f_0$ est de la forme $x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x}$, ce qui conclut.

5. Posons

$$\varphi : x \mapsto f(x) - \int_0^x (x-t)f(t) dt - g(x)$$

Nous avons vu en question 1 que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = f'(x) - \int_0^x f(t) dt - g'(x)$. Comme on a $f'' - f = g''$, on en déduit par intégration que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) - f'(0) - \int_0^x f(t) dt = g'(x) - g'(0), \quad \text{donc} \quad f'(x) - \int_0^x f(t) dt - g'(x) = 0.$$

Ainsi, on a montré que $\varphi' = 0$, donc φ est constante. Comme $\varphi(0) = 0$, φ est identiquement nulle, ce qui signifie que f est solution de $(\mathcal{E})$.

6. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Posons $f : x \mapsto \frac{e^x}{2} \int_0^x e^{-t} g''(t) dt - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x e^t g''(t) dt + \alpha e^x + \beta e^{-x}$ avec $g = \exp$.

Il vient alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{4} (e^{2x} - 1) + \alpha e^x + \beta e^{-x} = \frac{e^x}{4} (2x - 1 + 4\alpha) + \frac{e^{-x}}{4} (1 + 4\beta) \\ f'(x) &= \frac{e^x}{4} (2x + 1 + 4\alpha) - \frac{e^{-x}}{4} (1 + 4\beta). \end{aligned}$$

Ainsi, comme $f(0) = f'(0) = 1$, on obtient les relations $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - \beta = 1$, donc $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. La seule solution de $(\mathcal{E})$ dans ce cadre est alors $f : x \mapsto (2x + 3) \frac{e^x}{4} + \frac{e^{-x}}{4}$.

7. Si f et $\tilde{f}$ sont deux solutions de $(\mathcal{E})$, alors $f - \tilde{f}$ est solution de l'équation avec pour second membre la fonction $x \mapsto 0$, qui est deux fois dérivable. Ainsi, la question 3 entraîne que $f = \tilde{f}$, et il y a unicité.
8. Comme nous l'avons vu à la question 1, si f est continue, alors $A(f)$ est deux fois dérivable et en particulier continue. Ainsi, A est une application de E dans E . Par ailleurs, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et il est clair que A est linéaire. Soit $f \in \operatorname{Ker} A$, c'est-à-dire $A(f) = 0$. Alors, $(A(f))' = (A(f))'' = 0$. Or nous avons vu en 1 que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(A(f))''(x) = f(x)$. Ainsi $f = 0$ et donc A est injective.
9. Nous avons vu précédemment que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(A(f))'(x) = \int_0^x f(t) dt$ et $(A(f))'' = f$. Ainsi, $A(f)$ est deux fois dérivable et $(A(f))'' = f$.

10. Nous allons effectuer deux intégrations par parties successives dans l'expression voulue de $A^2(f)$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} A^2(f)(x) &= \int_0^x (x-t)A(f)(t) dt = \left[-\frac{(x-t)^2}{2} A(f)(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} A(f)'(t) dt \\ &= \left[-\frac{(x-t)^3}{6} A(f)'(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} A(f)''(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} f(t) dt, \end{aligned}$$

car $A(f)(0) = 0$, $A(f)'(0) = 0$ et $A(f)'' = f$.

11. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n(f) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t) dt. \quad (H_n)$$

- On sait déjà que (H_1) est vérifiée.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (H_n) est vraie. Nous allons à nouveau effectuer deux intégrations par parties successives : pour tout $x \in \mathbb{R}$, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} A^{n+1}(f)(x) &= A^n(A(f))(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} A(f)(t) dt \\ &= \left[-\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} A(f)(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} A(f)'(t) dt \\ &= \left[-\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} A(f)'(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} A(f)''(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f(t) dt, \end{aligned}$$

car $A(f)(0) = 0$, $A(f)'(0) = 0$ et $A(f)'' = f$. Ceci clôt la récurrence.

12. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et u à l'ordre $2n$ à la fonction sh , qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On obtient immédiatement que pour tout k pair, $\text{sh}^{(k)} = \text{sh}$ et pour tout k impair, $\text{sh}^{(k)} = \text{ch}$. Puisque $\text{sh}(0) = 0$ et $\text{ch}(0) = 1$. Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{\text{sh}^{(k)}(0)}{k!} u^k = \sum_{k=0}^n \frac{\text{sh}^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!} u^{2k-1} = \sum_{k=0}^n \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Enfin, $\text{sh}^{2n+1} = \text{ch}$, et ch est une fonction positive, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc pour tout $x \in [0, u]$ ou $x \in [u, 0]$, on a $|\text{sh}^{(n+1)}(u)| \leq \text{ch } u$. On a alors

$$\left| \text{sh}(u) - \sum_{k=1}^n \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| \leq \frac{\text{ch}(u)|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

13. On déduit de ce qui précède que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} |U(f)(x) - U_n(f)(x)| &= \left| \int_0^x \text{sh}(x-t)f(t)dt - \sum_{k=1}^n \int_0^x \frac{(x-t)^{2k-1}}{(2k-1)!} f(t)dt \right| \\ &= \left| \int_0^x f(t) \left(\text{sh}(x-t) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-t)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^x |f(t)| \left| \text{sh}(x-t) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-t)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| dt \\ &\leq \int_0^x |f(t)| \frac{\text{ch}(x-t)|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!} dt \\ &\leq \frac{\text{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^x |f(t)| dt \end{aligned}$$

La dernière inégalité provient du fait que ch est croissante et positive, donc pour tout $t \in [0, x]$, on a $0 \leq \text{ch}(x-t) \leq \text{ch}(x)$, et de même $|x-t| \leq |x|$. On peut procéder de la même manière lorsque $x \in \mathbb{R}_-$, et on obtient bien l'inégalité souhaitée.

14. Soit $f \in E$, montrons que $U(A(f)) = A(U(f)) = U(f) - A(f)$. On remarque que par définition de U_n , on a

$$U_n(A(f)) = A(U_n(f)) = U_{n+1}(f) - A(f)$$

Cherchons à passer à la limite pour obtenir le résultat. D'après la question précédente, on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U_n(F)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} U(F)(x)$, pour tout fonction F continue. Comme $A(f)$ est continue, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$U_n(A(f))(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} U(A(f))(x).$$

Par ailleurs, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$U_{n+1}(f)(x) - A(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} U(f)(x) - A(f)(x).$$

Il reste à montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(U_n(f))(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A(U(f))(x)$:

$$\begin{aligned} |A(U_n(f))(x) - A(U(f))(x)| &= \left| \int_0^x (x-t)(U_n(f)(t) - U(f)(t)) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^x |x-t| |U_n(f)(t) - U(f)(t)| dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^x |x-t| \frac{\text{ch}(t) |t|^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^t |f(s)| ds dt \right| \\ &\leq \frac{\text{ch}(x) |x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \int_0^x |x-t| dt \int_0^x |f(s)| ds \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a aussi $A(U_n(f))(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A(U(f))(x)$. Par unicité de la limite, on a montré que pour tout x ,

$$U(A(f))(x) = A(U(f))(x) = U(f) - A(f)(x),$$

ce qui donne bien $U(A(f)) = A(U(f)) = U(f) - A(f)$. Comme ceci vaut pour tout $f \in E$, on a $U \circ A = A \circ U = U - A$.

15. a. On a $(I - A) \circ (I + U) = I - A + U - A \circ U = I$ et de même $(I + U) \circ (I - A) = I + U - U \circ A = I$ donc $I - A$ et $I + U$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.
- b. L'équation $(\mathcal{E})$ peut se reformuler $(I - A)(f) = g$, et donc la solution de $(\mathcal{E})$ est la fonction $(I + U)(g)$.