

DS 7 – Version 1

21.03.2026 – 3h

- Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.
- Il est rappelé que :
 - ★ toute affirmation doit être rigoureusement justifiée,
 - ★ tout résultat obtenu doit être mis en valeur (encadré ou souligné).
- La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

★ ★ ★

Exercice 1 – Étude d'un endomorphisme

On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z) \end{aligned}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et déterminer les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de f . L'application f est-elle injective ?
3.
 - a. Quel est le rang de f ?
 - b. Soient $v_1 = f(e_1)$ et $v_2 = f(e_2)$. Justifier que (v_1, v_2) est une base de $\text{Im } f$.
4. Montrer que $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
5. Soit v_3 un vecteur non nul de $\text{Ker } f$. Justifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Écrire $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3 .

On appelle p la projection sur $F = \text{Im } f$ parallèlement à $G = \text{Ker } f$.

7. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (a, b, c) dans la base $\mathcal{B}$.
 - a. Déterminer les coordonnées de $p(u)$ dans la base $\mathcal{B}$.
 - b. Déterminer les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$.
8. En déduire que f est la composée de p et d'une application $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de la forme $h : u \mapsto \lambda u$, où λ est un réel qu'on précisera.

Exercice 2 – Des sous-espaces supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

1. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$\psi \circ \varphi = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Im } \varphi \subset \text{Ker } \psi.$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

- a. Rappeler la définition de $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$ et donner une description simple de leurs éléments.

b. Montrer que :

$$(f - \text{Id}_E) \circ (f + 2\text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad (f + 2\text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Quelles inclusions la question 1 permet-elle d'en déduire ?

c. Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.

Exercice 3 – Calcul d'une intégrale

Partie I – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

- Montrer que l'équation $x + 1 + \ln x = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^*$, qui vérifie $\alpha \in]0, 1[$.
- La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
 - Étudier les variations de f et préciser sa limite en $+\infty$.
 - Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthonormé du plan. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite d'équation $y = -x$. Donner l'allure de $\mathcal{C}$.

L'objet de la suite du problème est le calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

Partie II – Limite d'une suite réelle

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$

- Déterminer un réel a tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi at^2 \cos(nt) dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Indication : on pourra procéder par intégrations par parties.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer S_n à l'aide d'une intégrale.
- Montrer que, pour tout réel $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

- On considère la fonction g définie sur $[0, 2\pi[$ par :

$$g : t \mapsto \begin{cases} \frac{t^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0, 2\pi[, \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi[$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi g(t) \sin\left((n + \frac{1}{2})t\right) dt.$$

- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que si h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \int_0^\pi h(t) \sin\left((n + \frac{1}{2})t\right) dt \right| \leq \frac{|h(0)|}{n + \frac{1}{2}} + \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \max_{t \in [0, \pi]} |h'(t)|.$$

c. En déduire l'existence et la valeur de la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Partie III – Calcul de I

Pour tout entier $k \geq 1$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_k : x \mapsto \begin{cases} x^k \ln x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

8.
 - a. Étudier la continuité de f_1 sur $[0, 1]$.
 - b. Pour $k \geq 2$, montrer que f_k est dérivable sur $[0, 1]$ et exprimer sa dérivée à l'aide de f_{k-1} .
9. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $I_k = \int_0^1 f_k(x) \, dx$. Montrer que

$$I_k = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

10. On pose $m = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| I - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k \right| \leq m \int_0^1 x^n \, dx.$$

11. En déduire la valeur de I .

★ ★ ★