

DS 7 – Version 1

Corrigé

Exercice 1 – Étude d'un endomorphisme

On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z)$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et déterminer les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de f . L'application f est-elle injective ?
3.
 - a. Quel est le rang de f ?
 - b. Soient $v_1 = f(e_1)$ et $v_2 = f(e_2)$. Justifier que (v_1, v_2) est une base de $\text{Im } f$.
4. Montrer que $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
5. Soit v_3 un vecteur non nul de $\text{Ker } f$. Justifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Écrire $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3 .

On appelle p la projection sur $F = \text{Im } f$ parallèlement à $G = \text{Ker } f$.

7. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (a, b, c) dans la base $\mathcal{B}$.
 - a. Déterminer les coordonnées de $p(u)$ dans la base $\mathcal{B}$.
 - b. Déterminer les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$.
8. En déduire que f est la composée de p et d'une application $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de la forme $h : u \mapsto \lambda u$, où λ est un réel qu'on précisera.

1. On fixe $u = (x, y, z)$ et $v = (a, b, c)$ dans $\mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et on vérifie aisément que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$. On peut aussi remarquer que, avec l'identification $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, f est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a $f(e_1) = (2, 1, -1)$, $f(e_2) = (1, 2, 1)$, $f(e_3) = (-1, 1, 2)$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $(x, y, z) \in \text{Ker } f$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

On obtient alors que $\text{Ker } f = \{(z, -z, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -1, 1))$. La dimension de $\text{Ker } f$ est donc 1, et ainsi f n'est pas injective.

3.
 - a. Par le théorème du rang, on a $\dim \text{Ker } f + \text{rg } f = \dim \mathbb{R}^3$, ce qui donne $\text{rg } f = 2$.
 - b. La famille $(f(e_1), f(e_2)) = ((2, 1, -1), (1, 2, 1))$ est une famille de $\text{Im } f$ qui est libre car v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Comme $\dim \text{Im } f$, elle est aussi de bon cardinal, c'est donc une base de $\text{Im } f$.
4. On sait déjà que $\dim \text{Ker } f + \text{rg } f = \dim \mathbb{R}^3$. Montrons que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$. Si $v \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $v = a(1, -1, 1)$, et il existe $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $x = bv_1 + cv_2$. On vérifie en résolvant un système que $a = b = c = 0$.

Alternativement, on peut vérifier que la concaténation des familles $(f(e_1), f(e_2))$ et $((1, -1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\text{rg}((f(e_1), f(e_2)), (1, -1, 1)) = \text{rg}((2, 1, -1), (0, 3, 3), (0, -3, 3)) = \text{rg}((2, 1, -1), (0, 3, 3), (0, 0, 6)) = 3.$$

5. On sait que comme $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, la concaténation d'une base de $\text{Ker } f$ et d'une base de $\text{Im } f$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. On a $f(v_1) = (6, 3, -3)$ et $f(v_2) = (3, 6, 3)$. On observe que $f(v_1) = 3v_1$ et $f(v_2) = 3v_2$. Enfin, $v_3 \in \text{Ker } f$ donc $f(v_3) = 0$.
7.
 - a. On a $u = av_1 + bv_2 + cv_3$, donc $p(u) = ap(v_1) + bp(v_2) + cp(v_3) = av_1 + bv_2$ car $v_1, v_2 \in F$ et $v_3 \in G$. Ainsi, les coordonnées de $p(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $(a, b, 0)$.
 - b. De même que ci-dessus, on a $f(u) = af(v_1) + bf(v_2) + cf(v_3) = af(v_1) + bf(v_2) = 3av_1 + 3bv_2$ d'après la question 6. Ainsi, les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $(3a, 3b, 0)$.
8. On introduit l'homothétie $h : u \mapsto 3u$. On a $f(v_1) = 3v_1 = p(3v_1) = p(h(v_1))$. De même, $f(v_2) = 3v_2 = p(3v_2) = p(h(v_2))$, et $f(v_3) = 0 = p(3v_3) = p(h(v_3))$. Finalement, f et $p \circ h$ coïncident sur une base de $\mathbb{R}^3$, donc elles sont égales.

Exercice 2 – Des sous-espaces supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

1. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$\psi \circ \varphi = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Im } \varphi \subset \text{Ker } \psi.$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

- a. Rappeler la définition de $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$ et donner une description simple de leurs éléments.
- b. Montrer que :

$$(f - \text{Id}_E) \circ (f + 2\text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad (f + 2\text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Quelles inclusions la question 1 permet-elle d'en déduire ?

- c. Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.

1. Supposons $\psi \circ \varphi = 0_{\mathcal{L}(E)}$, et considérons $y \in \text{Im } \varphi$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Ainsi, comme on a $\psi(\varphi(x)) = \psi \circ \varphi(x) = 0_E$, on en déduit $y = \varphi(x) \in \text{Ker } \psi$. Ainsi, $\text{Im } \varphi \subset \text{Ker } \psi$.
Supposons maintenant $\text{Im } \varphi \subset \text{Ker } \psi$. Si $x \in E$, on a $\varphi(x) \in \text{Im } \varphi$, donc $\varphi(x) \in \text{Ker } \psi$. Par conséquent, on a $\psi \circ \varphi(x) = \psi(\varphi(x)) = 0_E$. Ainsi, $\psi \circ \varphi = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2.
 - a. On a $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \{x \in E, (f - \text{Id}_E)(x) = 0_E\}$, donc

$$x \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \Leftrightarrow (f - \text{Id}_E)(x) = 0_E \Leftrightarrow f(x) - x = 0_E \Leftrightarrow f(x) = x.$$

De même $x \in \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E) \Leftrightarrow f(x) + 2x = 0_E \Leftrightarrow f(x) = -2x$.

- b. On a $(f - \text{Id}_E) \circ (f + 2\text{Id}_E) = f \circ (f + 2\text{Id}_E) - (f + 2\text{Id}_E) = f^2 + 2f - f - 2\text{Id}_E = f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
De même, $(f + 2\text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = f^2 + 2f - f - 2\text{Id}_E = f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi, par la question 1, on a $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.

- c. On raisonne par analyse synthèse.

- *Analyse.* Soit $x \in E$. On suppose que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $x_2 \in \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$, c'est-à-dire que $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = -2x_2$. Ainsi, on a

$$\begin{cases} x &= x_1 + x_2 \\ f(x) &= x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Ceci entraîne que $x_1 = \frac{1}{3}(f(x) + 2x)$ et $x_2 = -\frac{1}{3}(f(x) - x)$.

- *Synthèse.* Si $x \in E$ et $x_1 = \frac{1}{3}(f(x) + 2x)$, $x_2 = -\frac{1}{3}(f(x) - x)$, alors $x = x_1 + x_2$. Par ailleurs, comme $x_1 = (f + 2\text{Id}_E)\left(\frac{1}{3}x\right) \in \text{Im}(f + 2\text{Id}_E)$, on a $x_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. De même, $x_2 = (f - \text{Id}_E)\left(-\frac{1}{3}x\right) \in \text{Im}(f - \text{Id}_E)$, on a $x_2 \in \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.

On a alors bien montré que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.

Exercice 3 – Calcul d'une intégrale

Partie I – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

- Montrer que l'équation $x + 1 + \ln x = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^*$, qui vérifie $\alpha \in]0, 1[$.
- La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
 - Étudier les variations de f et préciser sa limite en $+\infty$.
 - Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthonormé du plan. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite d'équation $y = -x$. Donner l'allure de $\mathcal{C}$.

L'objet de la suite du problème est le calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

Partie II – Limite d'une suite réelle

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$

- Déterminer un réel a tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi at^2 \cos(nt) dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Indication : on pourra procéder par intégrations par parties.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer S_n à l'aide d'une intégrale.
- Montrer que, pour tout réel $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}.$$

- On considère la fonction g définie sur $[0, 2\pi[$ par :

$$g : t \mapsto \begin{cases} \frac{t^2}{\sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \in]0, 2\pi[, \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi[$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi g(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt.$$

- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que si h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \int_0^\pi h(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt \right| \leq \frac{|h(0)|}{n + \frac{1}{2}} + \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \max_{t \in [0, \pi]} |h'(t)|.$$

- En déduire l'existence et la valeur de la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Partie III – Calcul de I

Pour tout entier $k \geq 1$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_k : x \mapsto \begin{cases} x^k \ln x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

8. a. Étudier la continuité de f_1 sur $[0, 1]$.
 b. Pour $k \geq 2$, montrer que f_k est dérivable sur $[0, 1]$ et exprimer sa dérivée à l'aide de f_{k-1} .
9. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $I_k = \int_0^1 f_k(x) dx$. Montrer que

$$I_k = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

10. On pose $m = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| I - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k \right| \leq m \int_0^1 x^n dx.$$

11. En déduire la valeur de I .

1. Sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto \ln x$ sont strictement croissantes et continues. Il en est donc de même pour leur somme. Or celle-ci tend vers $-\infty$ en 0 et prend la valeur 2 en 1, donc réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]-\infty, 2[$ et est supérieure à 2 sur $[1, +\infty[$.

L'équation $x+1+\ln x=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^*$, comprise entre 0 et 1.

2. a. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, et f est continue en 0.

Cependant, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln x}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$, donc f n'est pas dérivable en 0.

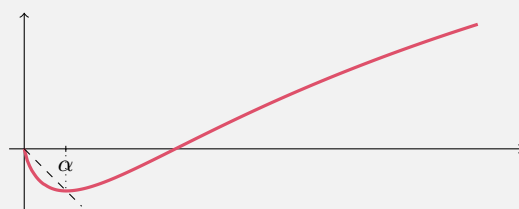
- b. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$.

D'après 1, on en déduit que f est strictement décroissante sur $]0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$. De plus, $\frac{x}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, donc $f(x) \sim \ln x$, et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

- c. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{C} \cap \{y = -x\} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = -x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x > 0 \text{ et } x(\ln x + x + 1) = 0) \text{ ou } (x = 0 \text{ et } 0 = -0) \\ y = f(x) = -x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0, \alpha\} \\ y = -x \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux seuls points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la seconde bissectrice sont $(0, 0)$ et $(\alpha, -\alpha)$.



3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On réalise deux intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t^2 \cos nt \, dt &= \underbrace{\left[t^2 \frac{\sin nt}{n} \right]_0^\pi}_{=0} - \frac{2}{n} \int_0^\pi t \sin nt \, dt = \left[\frac{2t \cos nt}{n^2} \right]_0^\pi - \frac{2}{n^2} \int_0^\pi \cos nt \, dt \\ &= \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} - \underbrace{\left[\frac{2 \sin nt}{n^3} \right]_0^\pi}_{=0} = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi at^2 \cos nt \, dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ avec $a = -\frac{1}{2\pi}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de l'intégrale, on en déduit que :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2\pi} \right) t^2 \cos kt \, dt = \frac{-1}{2\pi} \int_0^\pi t^2 \left(\sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt.$$

5. Soit $t \in \mathbb{Z} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{it} \neq 1$, et un calcul de somme géométrique donne

$$\sum_{k=1}^n \cos kt = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{it} \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1} \right).$$

On a par ailleurs, à l'aide de l'angle moitié :

$$\frac{e^{it} e^{int} - 1}{e^{it} - 1} = e^{it} \frac{e^{i\frac{nt}{2}} e^{i\frac{nt}{2}} - e^{-i\frac{nt}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}} e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = e^{\frac{(n+1)t}{2}} \frac{2i \sin \frac{nt}{2}}{2i \sin \frac{t}{2}}.$$

Ainsi,

$$\Re \left(e^{it} \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1} \right) = \frac{\cos \frac{(n+1)t}{2} \sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin \frac{(2n+1)t}{2} - \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

On a donc $\forall t \in \mathbb{Z} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$

6. La fonction g est dérivable sur $]0, 2\pi[$, et pour tout $t \in]0, 2\pi[$, on a

$$g'(t) = \frac{2t \sin \frac{t}{2} - \frac{1}{2} t^2 \cos \frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2t(\frac{t}{2} + o(t)) - \frac{1}{2} t^2(1 + o(1))}{\frac{t^2}{4} + o(t^2)} = \frac{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{\frac{t^2}{4} + o(t^2)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2, \quad \text{donc } g'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 2.$$

Ainsi, par théorème de la limite de la dérivée, g est dérivable en 0, et on a même obtenu que g' est continue sur $[0, 2\pi[$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi[$.

7. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^\pi t^2 \left(\sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt = \frac{-1}{2\pi} \int_0^\pi t^2 \left(\frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi t^2 dt - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi g(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt \\ &= \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi g(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt. \end{aligned}$$

b. Soient $h \in \mathcal{C}^1([0, \pi])$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme h' est continue sur le segment $[0, \pi]$, la fonction $|h'|$ admet un maximum sur $[0, \pi]$.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi h(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt &= \left[-h(t) \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{n + \frac{1}{2}} \right]_0^\pi + \int_0^\pi h'(t) \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{n + \frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{h(0)}{n + \frac{1}{2}} + \int_0^\pi h'(t) \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{n + \frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

Or par l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi h'(t) \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{n + \frac{1}{2}} dt \right| &\leq \int_0^\pi |h'(t)| \frac{|\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) t|}{n + \frac{1}{2}} dt \\ &\leq \int_0^\pi \left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \max_{t \in [0, \pi]} |h'(t)| \right) dt. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\left| \int_0^\pi h(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt \right| \leq \frac{|h(0)|}{n + \frac{1}{2}} + \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \max_{t \in [0, \pi]} |h'(t)|.$$

c. En appliquant l'inégalité précédente à g , qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi[$, donc aussi sur $[0, \pi]$, on obtient :

$$\left| \int_0^\pi g(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt \right| \leq \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \max_{t \in [0, \pi]} |g'(t)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

donc $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{12}.$

8. a. La fonction f_1 est continue sur $]0, 1]$, et f_1 est continue en 0 car $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f_1(0)$. Ainsi, f_1 est continue sur $[0, 1]$.

- b. Soit $k \geq 2$. Pour tout $x \geq 0$, on a $f_k(x) = x^{k-1}f_1(x)$, donc f_k est continue sur $[0, 1]$. De plus, par continuité de f_{k-1} en 0,

$$\frac{f_k(x) - f_k(0)}{x - 0} = x^{k-1} \ln x = f_{k-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

On en déduit que f_k est dérivable en 0 et que $f'_k(0) = f_{k-1}(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$, on a $f'_k(x) = kf_{k-1}(x) + x^{k-1}$, et cette relation est encore valable en 0. Ainsi, pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'_k(x) = kf_{k-1}(x) + x^{k-1}.$$

9. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on a $f'_{k+1}(x) = (k+1)f_k(x) + x^k$ pour tout $x \in [0, 1]$ d'après la question précédente. Alors

$$I_k = \int_0^1 f_k = \frac{1}{(k+1)} \int_0^1 (f'_{k+1}(x) - x^k) dx = \frac{1}{k+1} \left(f_{k+1}(1) - f_{k+1}(0) - \frac{1}{k+1} \right) = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^k = x \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{k-1} = x \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = x \frac{1 - (-1)^n x^n}{1 + x}.$$

Ainsi,

$$f(x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^k \ln x = \frac{x \ln x}{x+1} (1 - (1 - (-1)^n x^n)) = \frac{x \ln x}{x+1} (-1)^{n+1} x^n = f(x) (-1)^{n+1} x^n.$$

Par conséquent,

$$I - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^k \ln x \right) dx = (-1)^{n+1} \int_0^1 x^n f(x) dx$$

puis, par l'inégalité triangulaire,

$$\left| I - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k \right| \leq \int_0^1 x^n |f(t)| dx.$$

Comme $|f|$ est continue sur le segment $[0, 1]$, le théorème des bornes atteintes affirme que $|f|$ admet un maximum sur $[0, 1]$. En posant $m = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$, on obtient :

$$\left| I - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k \right| \leq m \int_0^1 x^n dx.$$

11. D'après la question précédente on a

$$\left| I - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k \right| \leq m \int_0^1 x^n dx \leq \frac{m}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

donc par encadrement $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I$. Or s'après 9,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = S_{n+1} - 1.$$

D'après 7c, on a $S_{n+1} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{12} - 1$, donc $I = \frac{\pi^2}{12} - 1$.